幂级数

徐海峰整理

December 19, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

幂级数

基本概念

定义

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \ (a_n \in \mathbb{R})$ 的函数项级数称为**幂级数**.

基本概念

定义

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \ (a_n \in \mathbb{R})$ 的函数项级数称为**幂级数**.

在 Taylor 展开那一节我们已经遇到过这样的级数.

基本概念

定义

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ 的函数项级数称为**幂级数**.

在 Taylor 展开那一节我们已经遇到过这样的级数.例如

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

基本概念

定义

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ 的函数项级数称为**幂级数**.

在 Taylor 展开那一节我们已经遇到过这样的级数.例如

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty).$$

定义

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ 的函数项级数称为**幂级数**.

在 Taylor 展开那一节我们已经遇到过这样的级数.例如

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty).$$

我们讨论 $x_0 = 0$ 的情形, 一般情形作变量代换 $t = x - x_0$ 即可.

收敛半径及基本性质

引理 (Abel)

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则它在区间 $|x| < |x_1|$ 内绝对收敛; 因此, 幂级数在 $x = x_2$ 处发散意味着在 $|x| > |x_2|$ 上均发散.

引理 (Abel)

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则它在区间 $|x| < |x_1|$ 内绝对收敛; 因此, 幂级数在 $x = x_2$ 处发散意味着在 $|x| > |x_2|$ 上均发散.

Proof.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. 故存在 $M > 0$, 使得 $|a_n x_1^n| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1$.

Abel 引理

引理 (Abel)

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则它在区间 $|x| < |x_1|$ 内绝对收敛; 因此, 幂级数在 $x = x_2$ 处发散意味着在 $|x| > |x_2|$ 上均发散.

Proof.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. 故存在 $M > 0$, 使得 $|a_n x_1^n| \leqslant M, \quad \forall\, n \geqslant 1$.这说明

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n,$$

引理 (Abel)

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则它在区间 $|x| < |x_1|$ 内绝对收敛;
因此, 幂级数在 $x = x_2$ 处发散意味着在 $|x| > |x_2|$ 上均发散.

Proof.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. 故存在 $M > 0$, 使得 $|a_n x_1^n| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1$.这说明

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n,$$

因此当 $|x| < |x_1|$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. □

注: 从证明可以看出, 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则对任何闭区间 $I \subset (-|x_1|, |x_1|)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 I 上都是一致收敛的.

柯西-阿达玛定理

定理 (Cauchy-Hadamard)

对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 记

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

定理 (Cauchy-Hadamard)

对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 记

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

- $\rho = 0$ 时, 级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛;

定理 (Cauchy-Hadamard)

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 记

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

- $\rho = 0$ 时, 级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛;
- $\rho = +\infty$ 时, 级数仅在 $x = 0$ 处收敛;

定理 (Cauchy-Hadamard)

对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，记

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

- $\rho = 0$ 时，级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛；
- $\rho = +\infty$ 时，级数仅在 $x = 0$ 处收敛；
- $0 < \rho < +\infty$ 时，级数在 $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ 内绝对收敛，在 $[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$ 之外发散. 此时，称 $\frac{1}{\rho}$ 为收敛半径.

柯西-阿达玛定理

定理 (Cauchy-Hadamard)

对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 记

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

- $\rho = 0$ 时, 级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛;
- $\rho = +\infty$ 时, 级数仅在 $x = 0$ 处收敛;
- $0 < \rho < +\infty$ 时, 级数在 $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ 内绝对收敛, 在 $[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$ 之外发散. 此时, 称 $\frac{1}{\rho}$ 为收敛半径.

注: (1) 在 $x = \pm\frac{1}{\rho}$ 处级数的收敛性必须视情况具体讨论.

定理 (Cauchy-Hadamard)

对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 记

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

- $\rho = 0$ 时, 级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛;
- $\rho = +\infty$ 时, 级数仅在 $x = 0$ 处收敛;
- $0 < \rho < +\infty$ 时, 级数在 $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ 内绝对收敛, 在 $[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$ 之外发散. 此时, 称 $\frac{1}{\rho}$ 为收敛半径.

注: (1) 在 $x = \pm\frac{1}{\rho}$ 处级数的收敛性必须视情况具体讨论.(2) $0 < \rho < +\infty$ 时, 对任意闭区间 $I \subset (-\rho^{-1}, \rho^{-1})$, 幂级数均在 I 上一致收敛.

Proof.

因为

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法, 当 $\rho|x| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.

Proof.

因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法, 当 $\rho|x| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.因此,

(1) $\rho = 0$ 时, x 可取任意实数.

Proof.

因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法, 当 $\rho|x| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.因此,

(1) $\rho = 0$ 时, x 可取任意实数.即级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛.

Proof.

因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法, 当 $\rho|x| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.因此,

(1) $\rho = 0$ 时, x 可取任意实数.即级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛.

(2) $\rho = +\infty$ 时, x 只能取 0.

Proof.

因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法, 当 $\rho|x| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛.因此,

(1) $\rho = 0$ 时, x 可取任意实数.即级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛.

(2) $\rho = +\infty$ 时, x 只能取 0.故级数仅在 $x = 0$ 处收敛.

Proof.

因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法, 当 $\rho|x| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.因此,

(1) $\rho = 0$ 时, x 可取任意实数.即级数在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对收敛.

(2) $\rho = +\infty$ 时, x 只能取 0.故级数仅在 $x = 0$ 处收敛.

(3) $0 < \rho < +\infty$ 时, $|x| < \frac{1}{\rho}$, 故级数在 $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ 内绝对收敛. □

Proof.

(3) 的后半部分使用反证法证明:

Proof.

(3) 的后半部分使用反证法证明:设 $x_1 \notin [-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 则存在 $M > 0$, 使得

$$|a_n x_1^n| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

Proof.

(3) 的后半部分使用反证法证明:设 $x_1 \notin [-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 则存在 $M > 0$, 使得

$$|a_n x_1^n| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

从而有

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M|x_1|^{-n}} = |x_1|^{-1} < \rho.$$

这就导出了矛盾! $\square$

例子

例

求几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径.

例

求几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径.

解. 此级数的系数 $a_n = 1$, 故 $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. 在 $x = \pm 1$ 处级数显然发散. ∎

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Proof.

以 $k = 1$ 为例.

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 内任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Proof.

以 $k=1$ 为例.首先, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R, 故它在闭区间 $I\subset(-R,R)$ 上一致收敛.

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Proof.

以 $k=1$ 为例.首先, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R, 故它在闭区间 $I \subset (-R, R)$ 上一致收敛.由前面的定理, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 I 上可微, 且

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Proof.

以 $k=1$ 为例. 首先, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R, 故它在闭区间 $I \subset (-R, R)$ 上一致收敛. 由前面的定理, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 I 上可微, 且

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

$S(x)$ 的高阶可微性的证明是完全类似的. $\square$

特别地, $S^{(n)}(0) = n!a_n$, 这说明和函数 $S(x)$ 的 Taylor 展开就是该幂级数本身.

例

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 之和.

例

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 之和.

解. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = 1,$

例

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 之和.

解. $\rho = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = 1$,故收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

例

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 之和.

解. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = 1$,故收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$.在 $(-1,1)$ 内, 有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^n}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

例

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 之和.

解. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = 1$,故收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$.在 $(-1,1)$ 内, 有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^n}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = -\ln(1-x), \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

例

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 之和.

解. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|}=1$,故收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$.在 $(-1,1)$ 内, 有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),\quad\forall\, x\in(-1,1).$$

注意到上式在 $x=-1$ 处也成立.

例

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 之和.

解. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = 1$,故收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$.在 $(-1,1)$ 内, 有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x), \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

注意到上式在 $x = -1$ 处也成立.即

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots .$$

定理 (Abel 连续性定理)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R $(0 < R < +\infty)$. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \ ;$$

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 收敛, 则

$$\lim_{x \to (-R)^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \ .$$

Proof.

如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n ,$$

Proof.

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

在 $[0, R]$ 上, $\left|\left(\frac{x}{R}\right)^n\right| \leqslant 1$, 且 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 关于 n 单调.

Proof.

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n ,$$

在 $[0, R]$ 上, $\left|\left(\frac{x}{R}\right)^n\right| \leqslant 1$, 且 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 关于 n 单调.由 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[0, R]$ 上连续, 因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S(R) = \lim_{x \to R^-} S(x) = \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Proof.

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n ,$$

在 $[0, R]$ 上, $\left|\left(\frac{x}{R}\right)^n\right| \leqslant 1$, 且 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 关于 n 单调.由 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[0, R]$ 上连续, 因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S(R) = \lim_{x \to R^-} S(x) = \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

关于 $-R$ 的证明完全类似(或考虑 $\tilde{a}_n = (-1)^n a_n$). □

定理 (逐项积分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \neq 0$, 则有

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall\, x \in (-R, R).$$

定理 (逐项积分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \neq 0$, 则有

$$\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall\, x \in (-R, R).$$

Proof.

不妨设 $x > 0$, 根据前面的讨论, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t \in [0, x]$ 上一致收敛, 因此可以逐项积分. □

逐项积分

定理 (逐项积分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \neq 0$, 则有

$$\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall\, x \in (-R, R).$$

Proof.

不妨设 $x > 0$, 根据前面的讨论, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t \in [0, x]$ 上一致收敛, 因此可以逐项积分. □

注: 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则上面的等式对 $x = R$ 也成立. 对 $-R$ 有类似结果.

Taylor 展开与幂级数

回顾 Taylor 展开.

回顾 Taylor 展开.如果 f 在 x_0 处任意次可导, 则 f 有 Taylor 展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ ,$$

回顾 Taylor 展开.如果 f 在 x_0 处任意次可导, 则 f 有 Taylor 展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n ,$$

然而, 这个幂级数在 x_0 以外的点上很可能不收敛, 即使收敛, 其极限也未必就是 $f(x)$.

回顾 Taylor 展开.如果 f 在 x_0 处任意次可导, 则 f 有 Taylor 展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ ,$$

然而, 这个幂级数在 x_0 以外的点上很可能不收敛, 即使收敛, 其极限也未必就是 $f(x)$.

不过我们有下面两个结果.

Bernstein 定理

引理

设 f 在 $[a,b]$ 上任意阶可导, 且各阶导数非负, 则

$$0 \leqslant f^{(n)}(x) \leqslant \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad \forall\, x \in (a,b),$$

这里 $M = f(b) - f(a)$.

引理

设 f 在 $[a, b]$ 上任意阶可导, 且各阶导数非负, 则

$$0 \leqslant f^{(n)}(x) \leqslant \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad \forall\, x \in (a, b),$$

这里 $M = f(b) - f(a)$.

Proof.

由 $f', f'' \geqslant 0$ 知 f, f' 为单调递增函数.

引理

设 f 在 $[a,b]$ 上任意阶可导, 且各阶导数非负, 则

$$0 \leqslant f^{(n)}(x) \leqslant \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad \forall\, x \in (a,b),$$

这里 $M = f(b) - f(a)$.

Proof.

由 $f', f'' \geqslant 0$ 知 f, f' 为单调递增函数.任给 $x \in (a,b)$, 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x,b)$, 使得

$$M = f(b) - f(a) \geqslant f(b) - f(x) = (b-x)f'(\xi) \geqslant (b-x)f'(x).$$

引理

设 f 在 $[a,b]$ 上任意阶可导, 且各阶导数非负, 则

$$0 \leqslant f^{(n)}(x) \leqslant \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad \forall\, x \in (a,b),$$

这里 $M = f(b) - f(a)$.

Proof.

由 $f', f'' \geqslant 0$ 知 f, f' 为单调递增函数.任给 $x \in (a,b)$, 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x,b)$, 使得

$$M = f(b) - f(a) \geqslant f(b) - f(x) = (b-x)f'(\xi) \geqslant (b-x)f'(x).$$

同理,

$$M \geqslant f(b) - f(x) = f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2 \geqslant \frac{1}{2}f''(x)(b-x)^2.$$

$\square$

续

Proof.

这里 f 在点 x 处展开.

$$f(b)-f(x)=f'(x)(b-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2$$

依次类推, 我们得到如下估计:

$$0\leqslant f^{(n)}(x)\leqslant \frac{n!M}{(b-x)^n},\quad \forall\, x\in(a,b).$$

□

定理 (Bernstein 定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上任意阶可导, 且各阶导数非负. 则当 $x, x_0 \in (a,b)$, 且 $|x - x_0| < b - x_0$ 时,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ .$$

定理 (Bernstein 定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上任意阶可导, 且各阶导数非负. 则当 $x, x_0 \in (a,b)$, 且 $|x-x_0| < b-x_0$ 时,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Proof.

$\square$

例子

函数 $f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的各阶导数均大于零，按照 Bernstein 定理，我们立即得到等式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty,\infty).$$

函数在某点的 Taylor 展开收敛于自身

定理

设 $R > 0$, f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内无限次可导. 如果存在 $M > 0$, 使得

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n, \quad \forall\ x \in (x_0 - R, x_0 + R),\ \forall\ n \geqslant 1.$$

则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall\ x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

定理

设 $R>0$, f 在 (x_0-R,x_0+R) 内无限次可导. 如果存在 $M>0$, 使得

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M^n,\quad \forall\, x\in(x_0-R,x_0+R),\ \forall\, n\geqslant 1.$$

则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \forall\, x\in(x_0-R,x_0+R).$$

Proof.

当 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 时, 由 Taylor 公式的 Lagrange 余项表示, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=|R_n(x)|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\&\leqslant\frac{M^{n+1}R^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

$\square$

因此

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

因此

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

这说明 f 在 x_0 处的 Taylor 展开的确收敛于 f 自身.

例

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (\text{广义组合数})$$

由于

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \to 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

故此幂级数的收敛半径为 1.

幂级数的乘法和除法运算

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内均收敛, 则

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) x^n, \quad \forall\ x \in (-R, R).$$

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在区间 $(-R,R)$ 内均收敛, 则

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)x^n, \quad \forall\, x \in (-R,R).$$

Proof.

只要证明对任意区间 $I \subset (-R,R)$ 等式成立即可.

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内均收敛, 则

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)x^n, \quad \forall\, x \in (-R, R).$$

Proof.

只要证明对任意区间 $I \subset (-R, R)$ 等式成立即可.在闭区间 I 上, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 都是绝对一致收敛的,

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内均收敛, 则

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)x^n, \quad \forall\ x \in (-R, R).$$

Proof.

只要证明对任意区间 $I \subset (-R, R)$ 等式成立即可.在闭区间 I 上, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 都是绝对一致收敛的,因此, 根据数项级数乘积的 Cauchy 定理, 有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(a_i x^i)(a_j x^j) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)x^n\ .$$

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内均收敛, 则

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)x^n, \quad \forall\ x \in (-R, R).$$

Proof.

只要证明对任意区间 $I \subset (-R, R)$ 等式成立即可.在闭区间 I 上, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 都是绝对一致收敛的,因此, 根据数项级数乘积的 Cauchy 定理, 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} (a_i x^i)(a_j x^j) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)x^n\ .$$

这就证明了幂级数的乘法公式. □

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ $(R > 0)$ 内收敛, $a_0 \neq 0$. 则存在 $r > 0$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $(-r, r)$ 内收敛, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \equiv 1, \quad \forall\, x \in (-r, r),$$

或写为

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots \ .$$

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ $(R>0)$ 内收敛, $a_0 \neq 0$. 则存在 $r>0$, 使得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $(-r, r)$ 内收敛, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \equiv 1, \quad \forall\, x \in (-r, r),$$

或写为

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots .$$

Proof.

不妨设 $a_0 = 1$.

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ $(R > 0)$ 内收敛, $a_0 \neq 0$. 则存在 $r > 0$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $(-r, r)$ 内收敛, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \equiv 1, \quad \forall\, x \in (-r, r),$$

或写为

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots \ .$$

Proof.

不妨设 $a_0 = 1$.我们递归定义 b_n 如下:

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ $(R > 0)$ 内收敛, $a_0 \neq 0$. 则存在 $r > 0$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $(-r, r)$ 内收敛, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \equiv 1, \quad \forall\, x \in (-r, r),$$

或写为

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots \ .$$

Proof.

不妨设 $a_0 = 1$.我们递归定义 b_n 如下:令 $b_0 = 1$, 当 $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ 已定义好后, 令

$$b_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} b_i, \quad n \geqslant 1.$$

Proof.

我们来说明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 具有正的收敛半径.

Proof.

我们来说明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 具有正的收敛半径.事实上, 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛, 故存在 $M > 0$, 使得

$$\left| a_n \left(\frac{R}{2} \right)^n \right| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 0.$$

Proof.

我们来说明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 具有正的收敛半径.事实上, 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛, 故存在 $M > 0$, 使得

$$\left| a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n \right| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 0.$$

因此有

$$\begin{aligned}
\left| b_n \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^n \right| &= \left| -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \left(\frac{R}{2}\right)^{n-i} \cdot b_i \left(\frac{R}{2}\right)^i \right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left| a_{n-i} \left(\frac{R}{2}\right)^{n-i} \right| \left| b_i \left(\frac{R}{2}\right)^i \right| \\
&\leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} \left| b_i \left(\frac{R}{2}\right)^i \right|,
\end{aligned}$$

Proof.

由此利用归纳法不难得到下面的估计:

$$\left|b_n\left(\frac{R}{2}\right)^n\right| \leqslant (1+M)^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{*}$$

Proof.

由此利用归纳法不难得到下面的估计:

$$\left| b_n \left(\frac{R}{2}\right)^n \right| \leqslant (1+M)^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{*}$$

这说明, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径至少为 $r = \dfrac{R}{2(1+M)}$.

Proof.

由此利用归纳法不难得到下面的估计:

$$\left| b_n \left(\frac{R}{2} \right)^n \right| \leqslant (1+M)^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{*}$$

这说明, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径至少为 $r = \dfrac{R}{2(1+M)}$.

事实上, 由(*)式,

$$\sqrt[n]{\left| b_n \left(\frac{R}{2} \right)^n \right|} \leqslant 1+M \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n|} \leqslant \frac{2(1+M)}{R}$$

因此,

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} \leqslant \frac{2(1+M)}{R} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\rho} \geqslant \frac{R}{2(1+M)}.$$

□

Proof.

由幂级数的乘法,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

Proof.

由幂级数的乘法,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

这里

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n \geqslant 0.$$

Proof.

由幂级数的乘法,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

这里

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n \geqslant 0.$$

其中 $c_0 = a_0 b_0 = 1$, 注意我们假设了 $a_0 = 1$, 而 $b_0 = 1$.

Proof.

由幂级数的乘法,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

这里

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n \geqslant 0.$$

其中 $c_0 = a_0 b_0 = 1$, 注意我们假设了 $a_0 = 1$, 而 $b_0 = 1$.当 $n \geqslant 1$ 时

$$c_n = b_n + (a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = 0,$$

Proof.

由幂级数的乘法,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

这里

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n \geqslant 0.$$

其中 $c_0 = a_0 b_0 = 1$, 注意我们假设了 $a_0 = 1$, 而 $b_0 = 1$.当 $n \geqslant 1$ 时

$$c_n = b_n + (a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = 0,$$

这是根据 $\{b_n\}$ 的构造所得.

Proof.

由幂级数的乘法,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

这里

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n \geqslant 0.$$

其中 $c_0 = a_0 b_0 = 1$, 注意我们假设了 $a_0 = 1$, 而 $b_0 = 1$.当 $n \geqslant 1$ 时

$$c_n = b_n + (a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = 0,$$

这是根据 $\{b_n\}$ 的构造所得.因此

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = 1.$$

Proof.

由幂级数的乘法,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

这里

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n \geqslant 0.$$

其中 $c_0 = a_0 b_0 = 1$, 注意我们假设了 $a_0 = 1$, 而 $b_0 = 1$.当 $n \geqslant 1$ 时

$$c_n = b_n + (a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = 0,$$

这是根据 $\{b_n\}$ 的构造所得.因此

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = 1.$$

这就证明了定理. □

(*) 式的证明

Proof.

$$\left|b_0\left(\frac{R}{2}\right)^0\right| = |b_0| = 1, \quad \left|b_1\left(\frac{R}{2}\right)^1\right| \leqslant M|b_0| = M < (1+M)^1,$$

(*) 式的证明

Proof.

$$\left|b_0\left(\frac{R}{2}\right)^0\right| = |b_0| = 1, \quad \left|b_1\left(\frac{R}{2}\right)^1\right| \leqslant M|b_0| = M < (1+M)^1,$$

$$\left|b_2\left(\frac{R}{2}\right)^2\right| \leqslant M\left(|b_0| + \left|b_1\left(\frac{R}{2}\right)^1\right|\right) \leqslant M(1+(1+M)) = M(M+2) < (1+M)^2.$$

(*) 式的证明

Proof.

$$\left|b_0\left(\frac{R}{2}\right)^0\right| = |b_0| = 1, \quad \left|b_1\left(\frac{R}{2}\right)^1\right| \leqslant M|b_0| = M < (1+M)^1,$$

$$\left|b_2\left(\frac{R}{2}\right)^2\right| \leqslant M\left(|b_0| + \left|b_1\left(\frac{R}{2}\right)^1\right|\right) \leqslant M(1+(1+M)) = M(M+2) < (1+M)^2.$$

故对于 $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, 假设下面的不等式成立

$$\left|b_k\left(\frac{R}{2}\right)^k\right| \leqslant (1+M)^k.$$

□

(*) 式的证明

Proof.

当 $k = n+1$ 时,

$$\left|b_{n+1}\left(\frac{R}{2}\right)^{n+1}\right| \leqslant M\sum_{k=0}^{n}\left|b_k\left(\frac{R}{2}\right)^k\right| \leqslant M\Big(1+(1+M)+(1+M)^2+\cdots+(1+M)^n\Big)$$

$$= M\cdot\frac{1-(1+M)^{n+1}}{1-(1+M)} = (1+M)^{n+1}-1 < (1+M)^{n+1}$$

因此, 对于任意非负整数 n, 都有

$$\left|b_n\left(\frac{R}{2}\right)^n\right| \leqslant (1+M)^n\ .$$

$\square$

Bernoulli 数

考虑函数 $\dfrac{x}{e^x - 1}$ 的幂级数展开:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

其系数 B_n 称为第 n 个 **Bernoulli 数**.

考虑函数 $\dfrac{x}{e^x-1}$ 的幂级数展开:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n,$$

其系数 B_n 称为第 n 个 **Bernoulli 数**.我们有

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x-1}&=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{-1}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right]^{-1}\\&=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\frac{x^6}{30240}-\frac{x^8}{1209600}+\cdots,\end{aligned}$$

Euler 数

考虑函数 $\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$ 的展开式

$$\frac{2e^x}{e^{2x}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}x^n,$$

其系数 E_n 称为 **Euler 数**.

母函数方法

设 $\{a_n\}$ 为一列实数，我们将形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \left(\text{有时是 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right)$$

称为 $\{a_n\}$ 的**生成函数**或**母函数**.