定积分的应用

徐海峰整理

October 29, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

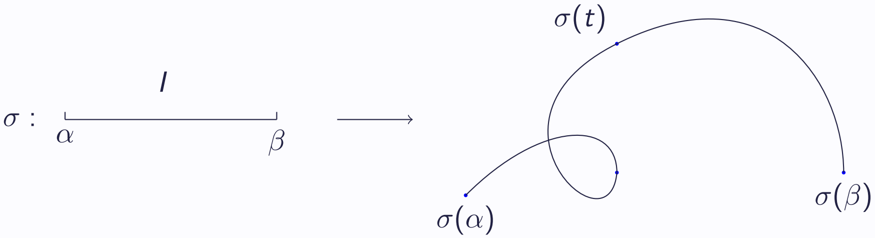
内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

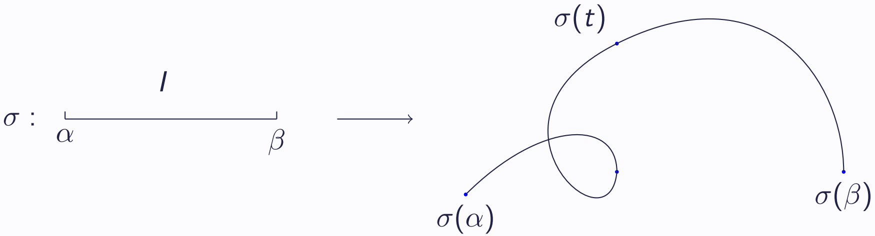
其他参考文献.

曲线的长度

曲线的定义



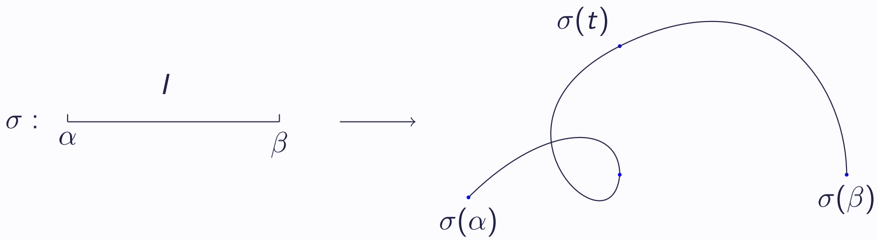
曲线的定义



设 $I = [\alpha, \beta]$ 为区间, 映射 $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ 用分量表示为

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

曲线的定义



设 $I = [\alpha, \beta]$ 为区间, 映射 $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ 用分量表示为

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

如果 $x(t)$, $y(t)$ 均为连续函数, 则称 σ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的**连续曲线**. 如果 $x(t)$, $y(t)$ 均可微（连续可微）, 则称 σ 为可微（连续可微）曲线.

曲线的弧长

设 σ 为**连续可微曲线**, 通过分割曲线并用直线段长度之和作逼近, 我们可以定义 σ 的长度为

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t.$$

曲线长度公式的推导

首先注意到下面的简单不等式

曲线长度公式的推导

首先注意到下面的简单不等式

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

曲线长度公式的推导

首先注意到下面的简单不等式

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

这实际上由三角形的两边之差小于等于第三边推出. 如下

图.

曲线长度公式的推导

首先注意到下面的简单不等式

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

这实际上由三角形的两边之差小于等于第三边推出. 如下

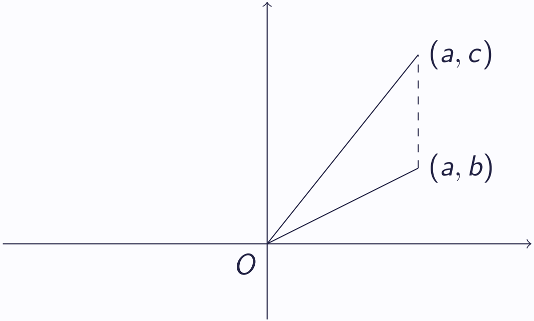


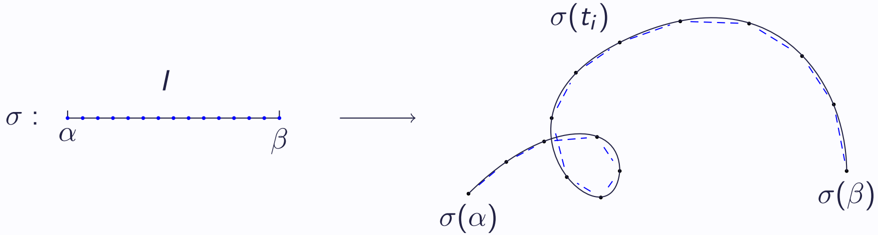
图.

分割

将 $[\alpha, \beta]$ 分割为 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 点 $(x(t_i), y(t_i))$ 把曲线分成若干段, 每一段的长度可以近似地用直线段的长度表示,

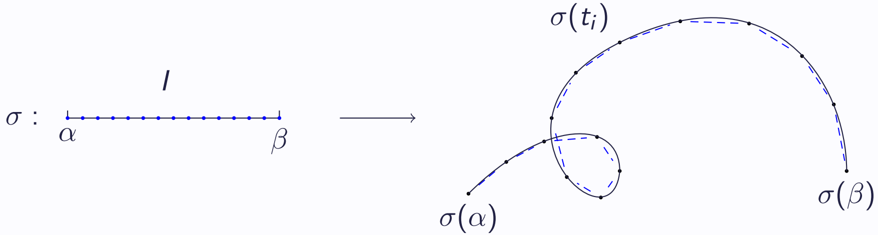
分割

将 $[\alpha, \beta]$ 分割为 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$，点 $(x(t_i), y(t_i))$ 把曲线分成若干段，每一段的长度可以近似地用直线段的长度表示，



分割

将 $[\alpha, \beta]$ 分割为 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 点 $(x(t_i), y(t_i))$ 把曲线分成若干段, 每一段的长度可以近似地用直线段的长度表示,



即

$$L(\sigma) \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

曲线用折线逼近

由微分中值定理, 存在 $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$, 使得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

由微分中值定理, 存在 $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$, 使得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

从而有

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\Delta t_i,$$

曲线用折线逼近

由微分中值定理, 存在 $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$, 使得

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

从而有

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\Delta t_i,$$

这里 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

应用之前的简单不等式, 有

$$\left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2}\Delta t_i-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\Delta t_i\right|\leqslant|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i,$$

应用之前的简单不等式, 有

$$\left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2}\Delta t_i-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\Delta t_i\right|\leqslant|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i,$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y')\Delta t_i\to 0,\quad (\|\pi\|=\max\{|t_i-t_{i-1}|\}\to 0)$$

应用之前的简单不等式, 有

$$\left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2}\Delta t_i-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\Delta t_i\right|\leqslant|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i,$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y')\Delta t_i\to 0,\quad (\|\pi\|=\max\{|t_i-t_{i-1}|\}\to 0)$$

(这里 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y')\Delta t_i\to 0$ $(\|\pi\|=\max\{|t_i-t_{i-1}|\}\to 0)$ 是因为 y' 连续, 故可积.)

应用之前的简单不等式, 有

$$\left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2}\Delta t_i-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\Delta t_i\right|\leqslant|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i,$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|\Delta t_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y')\Delta t_i\to 0,\quad (\|\pi\|=\max\{|t_i-t_{i-1}|\}\to 0)$$

(这里 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y')\Delta t_i\to 0$ $(\|\pi\|=\max\{|t_i-t_{i-1}|\}\to 0)$ 是因为 y' 连续, 故可积.)

因此有

$$\begin{aligned}L(\sigma)&=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}\\&=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\Delta t_i\\&=\int_{\alpha}^{\beta}[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注. 如果 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$,

注. 如果 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$,令

$$s = \phi(t) = \int_\alpha^t [(x'(u))^2 + (y'(u))^2]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

注. 如果 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$,令

$$s=\phi(t)=\int_\alpha^t[(x'(u))^2+(y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

则 $\phi:[\alpha,\beta]\to[0,L(\sigma)]$ 是严格单调递增函数,

注. 如果 $(x'(t))^2+(y'(t))^2 \neq 0$,令

$$s=\phi(t)=\int_\alpha^t [(x'(u))^2+(y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u, \quad t\in[\alpha,\beta].$$

则 $\phi:[\alpha,\beta]\to[0,L(\sigma)]$ 是严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t=\psi(s)$,

注. 如果 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$,令

$$s=\phi(t)=\int_\alpha^t[(x'(u))^2+(y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

则 $\phi:[\alpha,\beta]\to[0,L(\sigma)]$ 是严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t=\psi(s)$,s 称为 σ 的**弧长参数**.

注. 如果 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$,令

$$s=\phi(t)=\int_\alpha^t[(x'(u))^2+(y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

则 $\phi:[\alpha,\beta]\to[0,L(\sigma)]$ 是严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t=\psi(s)$,s 称为 σ 的**弧长参数**.

记 $\tilde{\sigma}(s)=\sigma(\psi(s))$, $s\in[0,L(\sigma)]$.

注. 如果 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$,令

$$s=\phi(t)=\int_\alpha^t [(x'(u))^2+(y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

则 $\phi:[\alpha,\beta]\to[0,L(\sigma)]$ 是严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t=\psi(s)$,s 称为 σ 的**弧长参数**.

记 $\tilde{\sigma}(s)=\sigma(\psi(s))$, $s\in[0,L(\sigma)]$. 根据反函数的求导公式, 易见

$$\|\tilde{\sigma}'(s)\|=\sqrt{(\tilde{x}'(s))^2+(\tilde{y}'(s))^2}=1,$$

注. 如果 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$,令

$$s=\phi(t)=\int_\alpha^t[(x'(u))^2+(y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

则 $\phi:[\alpha,\beta]\to[0,L(\sigma)]$ 是严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t=\psi(s)$,s 称为 σ 的**弧长参数**.

记 $\tilde{\sigma}(s)=\sigma(\psi(s))$, $s\in[0,L(\sigma)]$. 根据反函数的求导公式, 易见

$$\|\tilde{\sigma}'(s)\|=\sqrt{(\tilde{x}'(s))^2+(\tilde{y}'(s))^2}=1,$$

这里 $\tilde{\sigma}(s)=(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s))=(x(\psi(s)),y(\psi(s)))$.

Proof.

事实上,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}'(s) &= \sigma'(t)\cdot\psi'(s) = (x'(t)\cdot\psi'(s), y'(t)\cdot\psi'(s)) \\
&= \left(x'(t)\cdot\frac{1}{s'(t)}, y'(t)\cdot\frac{1}{s'(t)}\right) \\
&= \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\right)
\end{aligned}
$$

Proof.

事实上,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}'(s) &= \sigma'(t)\cdot\psi'(s) = (x'(t)\cdot\psi'(s), y'(t)\cdot\psi'(s)) \\
&= \left(x'(t)\cdot\frac{1}{s'(t)}, y'(t)\cdot\frac{1}{s'(t)}\right) \\
&= \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\right)
\end{aligned}
$$

故 $\|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1$. $\square$

例

求摆线

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad a > 0$$

一拱的长度.

例

求摆线

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad a > 0$$

一拱的长度.

解. 我们求 $t \in [0, 2\pi]$ 时曲线的长度:

摆线

例

求摆线

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad a > 0$$

一拱的长度.

解. 我们求 $t \in [0, 2\pi]$ 时曲线的长度:$x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$,

例

求摆线

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad a > 0$$

一拱的长度.

解. 我们求 $t \in [0, 2\pi]$ 时曲线的长度:$x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$,

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} a[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \mathrm{d}t \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t = 8a.
\end{aligned}$$

摆线参数方程的推导

曲率

弧长微分

$$s = \phi(t) = \int_{\alpha}^{t} [(x'(u))^2 + (y'(u))^2]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

两边作微分可得

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t.$$

弧长微分

$$s = \phi(t) = \int_{\alpha}^{t} [(x'(u))^2 + (y'(u))^2]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

两边作微分可得

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t.$$

由于 $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$, 故

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2},$$

弧长微分

$$s=\phi(t)=\int_\alpha^t [(x'(u))^2+(y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u, \quad t\in[\alpha,\beta],$$

两边作微分可得

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

由于 $\mathrm{d}x=x'(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y=y'(t)\mathrm{d}t$, 故

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2},$$

也可写为

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2.$$

弧长微分

$$s = \phi(t) = \int_\alpha^t [(x'(u))^2 + (y'(u))^2]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

两边作微分可得

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t.$$

由于 $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$, 故

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2},$$

也可写为

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2.$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \mathrm{d}x.$$

曲率的定义

假设曲线 C 在每一点处有切线, 且切线随着切点的移动而连续转动, 则称这种曲线是 C^1 光滑曲线.

曲率的定义

假设曲线 C 在每一点处有切线, 且切线随着切点的移动而连续转动, 则称这种曲线是 C^1 光滑曲线.

这样的曲线在局部可以看成是某个函数的图像, 不妨是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in I$.

曲率的定义

假设曲线 C 在每一点处有切线，且切线随着切点的移动而连续转动，则称这种曲线是 C^1 光滑曲线.

这样的曲线在局部可以看成是某个函数的图像，不妨是 x 的函数，记作 $y = f(x)$, $x \in I$.

切线随着切点的移动而连续转动的意思即 f 是 C^1 光滑函数.

曲率的定义

假设曲线 C 在每一点处有切线, 且切线随着切点的移动而连续转动, 则称这种曲线是 C^1 光滑曲线.

这样的曲线在局部可以看成是某个函数的图像, 不妨是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in I$.

切线随着切点的移动而连续转动的意思即 f 是 C^1 光滑函数.

简单图形的面积

单调数列

Theorems, Lemmas, ...

定理

The following statement is correct

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{L} \cos\left(l\frac{2\pi}{L} + 0\right) \tag{1}$$

Elements

Typography

```
The theme provides sensible defaults to
\emph{emphasize} text, \alert{accent} parts
or show \textbf{bold} results.
```

becomes

The theme provides sensible defaults to *emphasize* text, **accent** parts or show **bold** results.

Font feature test

- Regular
- *Italic*
- Small Caps
- **Bold**
- ***Bold Italic***
- **Bold Small Caps**
- `Monospace`
- *`Monospace Italic`*
- **`Monospace Bold`**
- ***`Monospace Bold Italic`***

Lists

Items

- Milk
- Eggs
- Potatoes

Enumerations

1. First,
2. Second and
3. Last.

Descriptions

PowerPoint Meeh.

Beamer Yeeeha.

Table 1: Largest cities in the world (source: Wikipedia)

City	Population
Mexico City	20,116,842
Shanghai	19,210,000
Peking	15,796,450
Istanbul	14,160,467

Blocks

Three different block environments are pre-defined and may be styled with an optional background color.

Default

Block content.

Alert

Block content.

Example

Block content.

Default

Block content.

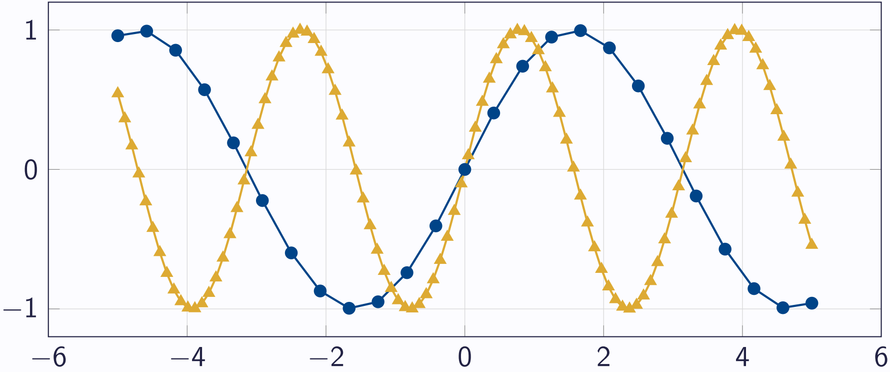
Alert

Block content.

Example

Block content.

Line plots



Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.