



中值公式与 Taylor 公式

徐海峰整理

March 20, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

其他参考文献.

微分中值定理

设 $p, q \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\sigma(t) = (1 - t)p + tq, \quad \forall t \in [0, 1].$$

我们称 $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中连接 p, q 的直线段(记作 $\overline{pq}$).

设 $p, q \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\sigma(t) = (1 - t)p + tq, \quad \forall t \in [0, 1].$$

我们称 $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中连接 p, q 的直线段(记作 $\overline{pq}$).

定义

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果任给 $a_1, a_2 \in A$, 连接 a_1, a_2 的直线段仍包含于 A , 则称 A 为凸集.

设 $p, q \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\sigma(t) = (1 - t)p + tq, \quad \forall t \in [0, 1].$$

我们称 $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中连接 p, q 的直线段(记作 $\overline{pq}$).

定义

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果任给 $a_1, a_2 \in A$, 连接 a_1, a_2 的直线段仍包含于 A , 则称 A 为凸集.

特别地, 凸集都是道路连通的. 我们将开的凸集称为凸域.

凸集

设 $p, q \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\sigma(t) = (1-t)p + tq, \quad \forall t \in [0, 1].$$

我们称 $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中连接 p, q 的直线段(记作 $\overline{pq}$).

定义

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果任给 $a_1, a_2 \in A$, 连接 a_1, a_2 的直线段仍包含于 A , 则称 A 为凸集.

特别地, 凸集都是道路连通的. 我们将开的凸集称为凸域.

例

$\mathbb{R}^n$ 中的开球 $B_r(x)$ 都是凸集.

我们知道, 包括 Lagrange 定理和 Cauchy 定理等在内的微分中值定理是研究一元函数的重要工具.

我们知道, 包括 Lagrange 定理和 Cauchy 定理等在内的微分中值定理是研究一元函数的重要工具. 对于多元函数, 也有部分类似结果. 例如, 对于多元函数, 我们有

我们知道, 包括 Lagrange 定理和 Cauchy 定理等在内的微分中值定理是研究一元函数的重要工具. 对于多元函数, 也有部分类似结果. 例如, 对于多元函数, 我们有

定理 (微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$f(b) - f(a) = Jf(\xi) \cdot (b - a),$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$, 即 ξ 位于连接 a, b 的直线段上.

我们知道, 包括 Lagrange 定理和 Cauchy 定理等在内的微分中值定理是研究一元函数的重要工具. 对于多元函数, 也有部分类似结果. 例如, 对于多元函数, 我们有

定理 (微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$f(b) - f(a) = Jf(\xi) \cdot (b - a),$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$, 即 ξ 位于连接 a, b 的直线段上.

Proof.

设 $\sigma : [0, 1] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ 为连接 a, b 的直线段, 即

$$\sigma(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1].$$

我们知道, 包括 Lagrange 定理和 Cauchy 定理等在内的微分中值定理是研究一元函数的重要工具. 对于多元函数, 也有部分类似结果. 例如, 对于多元函数, 我们有

定理 (微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$f(b) - f(a) = Jf(\xi) \cdot (b - a),$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$, 即 ξ 位于连接 a, b 的直线段上.

Proof.

设 $\sigma : [0, 1] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ 为连接 a, b 的直线段, 即

$$\sigma(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1].$$

则

$$\sigma(t) - \sigma(t_0) = a + t(b - a) - [a + t_0(b - a)] = (t - t_0)(b - a)$$



Proof.

Proof.

由于 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数, 故存在矩阵 $A_{1 \times n}$, 使得

$$|f(x) - [f(x^0) + A(x - x^0)]| = o(\|x - x^0\|).$$

Proof.

由于 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数, 故存在矩阵 $A_{1 \times n}$, 使得

$$|f(x) - [f(x^0) + A(x - x^0)]| = o(\|x - x^0\|).$$

将 $x = \sigma(t)$, $x^0 = \sigma(t_0)$ 代入, 得

$$|f(\sigma(t)) - [f(\sigma(t_0)) + A(\sigma(t) - \sigma(t_0))]| = o(\|\sigma(t) - \sigma(t_0)\|).$$

这推出

$$|f(\sigma(t)) - [f(\sigma(t_0)) + A(t - t_0)(b - a)]| = o(\|(t - t_0)(b - a)\|).$$

即

$$|f(\sigma(t)) - [f(\sigma(t_0)) + A(b - a)(t - t_0)]| = o(|t - t_0|).$$

Proof.

由于 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数, 故存在矩阵 $A_{1 \times n}$, 使得

$$|f(x) - [f(x^0) + A(x - x^0)]| = o(\|x - x^0\|).$$

将 $x = \sigma(t)$, $x^0 = \sigma(t_0)$ 代入, 得

$$|f(\sigma(t)) - [f(\sigma(t_0)) + A(\sigma(t) - \sigma(t_0))]| = o(\|\sigma(t) - \sigma(t_0)\|).$$

这推出

$$|f(\sigma(t)) - [f(\sigma(t_0)) + A(t - t_0)(b - a)]| = o(\|(t - t_0)(b - a)\|).$$

即

$$|f(\sigma(t)) - [f(\sigma(t_0)) + A(b - a)(t - t_0)]| = o(|t - t_0|).$$

这说明复合函数 $\varphi(t) = f \circ \sigma(t)$ 是可微的一元函数.

□

Proof.

由一元函数的微分中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(1 - 0).$$

Proof.

由一元函数的微分中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(1 - 0).$$

上式即

$$f(b) - f(a) = Jf(\xi) \cdot (b - a),$$

Proof.

由一元函数的微分中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(1 - 0).$$

上式即

$$f(b) - f(a) = Jf(\xi) \cdot (b - a),$$

其中 $\xi = \sigma(\theta) = a + \theta(b - a)$.



推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau : [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau : [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau : [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法).

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法). 设 $t < 1$.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法). 设 $t < 1$. 首先, 因为 D 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(p) \subset D$.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法). 设 $t < 1$. 首先, 因为 D 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(p) \subset D$. 其次, 由 $\tau(t) = p$ 以及 τ 的连续性可知, 存在 $\delta > 0$, $\tau([t, t + \delta]) \subset B_\varepsilon(p)$.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法). 设 $t < 1$. 首先, 因为 D 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(p) \subset D$. 其次, 由 $\tau(t) = p$ 以及 τ 的连续性可知, 存在 $\delta > 0$, $\tau([t, t + \delta]) \subset B_\varepsilon(p)$. 由于 $B_\varepsilon(p)$ 为凸域, f 在 $B_\varepsilon(p)$ 中为常值函数.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法). 设 $t < 1$. 首先, 因为 D 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(p) \subset D$. 其次, 由 $\tau(t) = p$ 以及 τ 的连续性可知, 存在 $\delta > 0$, $\tau([t, t + \delta]) \subset B_\varepsilon(p)$. 由于 $B_\varepsilon(p)$ 为凸域, f 在 $B_\varepsilon(p)$ 中为常值函数. 特别地, $[t, t + \delta] \subset T$. 这与 t 的定义相矛盾.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法). 设 $t < 1$. 首先, 因为 D 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(p) \subset D$. 其次, 由 $\tau(t) = p$ 以及 τ 的连续性可知, 存在 $\delta > 0$, $\tau([t, t + \delta]) \subset B_\varepsilon(p)$. 由于 $B_\varepsilon(p)$ 为凸域, f 在 $B_\varepsilon(p)$ 中为常值函数. 特别地, $[t, t + \delta] \subset T$. 这与 t 的定义相矛盾.

由 $t = 1$ 即知 $f(q) = f(p)$.

推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域(道路连通开集), $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常数.

Proof.

如果 D 为凸域, 则欲证结论从上一定理立即得到. 一般地, 任取 D 中两点 p, q , 设 $\tau: [0, 1] \rightarrow D$ 是连接 p, q 的连续曲线. 令

$$T = \{s \in [0, 1] \mid f \circ \tau(s) = f(p)\}.$$

因为 $0 \in T$, 故 T 不是空集. 记 t 为 T 的上确界. 由 f 和 τ 的连续性可知 $t \in T$.

下证 $t = 1$ (反证法). 设 $t < 1$. 首先, 因为 D 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(p) \subset D$. 其次, 由 $\tau(t) = p$ 以及 τ 的连续性可知, 存在 $\delta > 0$, $\tau([t, t + \delta]) \subset B_\varepsilon(p)$. 由于 $B_\varepsilon(p)$ 为凸域, f 在 $B_\varepsilon(p)$ 中为常值函数. 特别地, $[t, t + \delta] \subset T$. 这与 t 的定义相矛盾.

由 $t = 1$ 即知 $f(q) = f(p)$. 因为 p, q 是任取的, 这说明 f 为常值函数. □

如何证明 $\tau(t) = p$

Proof.

这里证明一下 $\tau(t) = p$.

如何证明 $\tau(t) = p$

Proof.

这里证明一下 $\tau(t) = p$. 由条件 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 故存在 $A_{1 \times n}$, 使得

$$|f(\tau(t)) - [f(\tau(0)) + A(\tau(t) - \tau(0))]| = o(\|\tau(t) - \tau(0)\|).$$

如何证明 $\tau(t) = p$

Proof.

这里证明一下 $\tau(t) = p$. 由条件 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 故存在 $A_{1 \times n}$, 使得

$$|f(\tau(t)) - [f(\tau(0)) + A(\tau(t) - \tau(0))]| = o(\|\tau(t) - \tau(0)\|).$$

因为 $t \in T$, 故 $f(\tau(t)) = f(p) = f(\tau(0))$, 故上式化为

$$|A(\tau(t) - p)| = o(\|\tau(t) - p\|).$$

如何证明 $\tau(t) = p$

Proof.

这里证明一下 $\tau(t) = p$. 由条件 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 故存在 $A_{1 \times n}$, 使得

$$|f(\tau(t)) - [f(\tau(0)) + A(\tau(t) - \tau(0))]| = o(\|\tau(t) - \tau(0)\|).$$

因为 $t \in T$, 故 $f(\tau(t)) = f(p) = f(\tau(0))$, 故上式化为

$$|A(\tau(t) - p)| = o(\|\tau(t) - p\|).$$

这推出 $\tau(t) = p$.



例

考虑向量值函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t^3)$, 则

$$Jf(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

如果存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(1) - f(0) = Jf(\theta) \cdot (1 - 0),$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\theta \\ 3\theta^2 \end{pmatrix}.$$

但这个等式无解. 这说明上面的微分中值定理对向量值函数不再成立.

拟微分中值定理

定理 (拟微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|b - a\|,$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$.

定理 (拟微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|b - a\|,$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$.

Proof.

记 $\sigma : [0, 1] \rightarrow D$ 为连接 a, b 的直线段 ($\sigma(t) = a + t(b - a)$).

定理 (拟微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|b - a\|,$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$.

Proof.

记 $\sigma : [0, 1] \rightarrow D$ 为连接 a, b 的直线段 ($\sigma(t) = a + t(b - a)$). 考虑复合函数

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle f(b) - f(a), f \circ \sigma(t) \rangle,$$

定理 (拟微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|b - a\|,$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$.

Proof.

记 $\sigma : [0, 1] \rightarrow D$ 为连接 a, b 的直线段 ($\sigma(t) = a + t(b - a)$). 考虑复合函数

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle f(b) - f(a), f \circ \sigma(t) \rangle,$$

则 φ 为一元可微函数, 且 $\varphi'(t) = \langle f(b) - f(a), Jf(\sigma(t)) \cdot (b - a) \rangle$.

定理 (拟微分中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, 则任给 $a, b \in D$, 存在 $\xi \in D$, 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Jf(\xi)\| \cdot \|b - a\|,$$

其中 $\xi = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$.

Proof.

记 $\sigma : [0, 1] \rightarrow D$ 为连接 a, b 的直线段 ($\sigma(t) = a + t(b - a)$). 考虑复合函数

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle f(b) - f(a), f \circ \sigma(t) \rangle,$$

则 φ 为一元可微函数, 且 $\varphi'(t) = \langle f(b) - f(a), Jf(\sigma(t)) \cdot (b - a) \rangle$.

这里用到了复合求导

$$J(f \circ \sigma)(t) = Jf(\sigma(t)) \cdot J\sigma(t) = Jf(\sigma(t)) \cdot (b - a).$$

Proof.

由一元函数的微分中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |\varphi'(\theta)| = |\langle f(b) - f(a), Jf(\sigma(\theta)) \cdot (b - a) \rangle| \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\sigma(\theta)) \cdot (b - a)\| \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\sigma(\theta))\| \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

Proof.

由一元函数的微分中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |\varphi'(\theta)| = |\langle f(b) - f(a), Jf(\sigma(\theta)) \cdot (b - a) \rangle| \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\sigma(\theta)) \cdot (b - a)\| \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\sigma(\theta))\| \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |\langle f(b) - f(a), f(b) \rangle - \langle f(b) - f(a), f(a) \rangle| \\ &= \|f(b) - f(a)\|^2, \end{aligned}$$

Proof.

由一元函数的微分中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |\varphi'(\theta)| = |\langle f(b) - f(a), Jf(\sigma(\theta)) \cdot (b - a) \rangle| \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\sigma(\theta)) \cdot (b - a)\| \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|Jf(\sigma(\theta))\| \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |\langle f(b) - f(a), f(b) \rangle - \langle f(b) - f(a), f(a) \rangle| \\ &= \|f(b) - f(a)\|^2, \end{aligned}$$

故

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Jf(\sigma(\theta))\| \cdot \|b - a\|.$$



推论

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微. 如果 $Jf \equiv 0$, 则 f 为常值映射.

近似计算

根据定义, 如果一个多元函数可微, 则它可以用线性函数逼近, 利用这一点我们可以作近似计算.

根据定义, 如果一个多元函数可微, 则它可以用线性函数逼近, 利用这一点我们可以作近似计算.

例

求 $\frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}}$ 的近似值.

根据定义, 如果一个多元函数可微, 则它可以用线性函数逼近, 利用这一点我们可以作近似计算.

例

求 $\frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}}$ 的近似值.

解. 考虑函数 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt{y}\sqrt[3]{z}}$, $x^0 = (1, 1, 1)$, $h = (0.03, -0.02, 0.06)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}} &= f(1.03, 0.98, 1.06) \\ &= f(x^0 + h) \approx f(x^0) + Jf(x^0) \cdot h \\ &= 1 + \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.02 \\ 0.06 \end{pmatrix} = 1.05.\end{aligned}$$

利用微分作近似计算只考虑了函数的线性部分, 为了更好地求近似值, 我们要考虑高阶逼近.

利用微分作近似计算只考虑了函数的线性部分, 为了更好地求近似值, 我们要考虑高阶逼近.

跟一元函数类似, 可以用多元多项式来逼近多元函数.

为此先引进一些记号.

多重指标

为此先引进一些记号. 设 $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ($1 \leq i \leq n$), 记 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 称为**多重指标**.

多重指标

为此先引进一些记号. 设 $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ($1 \leq i \leq n$), 记 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 称为**多重指标**. 记

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

多重指标

为此先引进一些记号. 设 $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ($1 \leq i \leq n$), 记 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 称为**多重指标**. 记

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

如果 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则记

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

多重指标

为此先引进一些记号. 设 $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ($1 \leq i \leq n$), 记 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 称为**多重指标**. 记

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

如果 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则记

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

对于多元函数 f , 还用下面的记号表示 $|\alpha|$ 阶偏导数:

$$D^\alpha f(x^0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x^0).$$

定理

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f \in C^{m+1}(D)$ (即 f 具有 $m+1$ 阶连续偏导数),
 $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. 则任给 $x \in D$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha.$$

Taylor公式

定理

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f \in C^{m+1}(D)$ (即 f 具有 $m+1$ 阶连续偏导数),
 $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. 则任给 $x \in D$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha.$$

Proof.

考虑一元函数 $\varphi(t) = f(a + t(x-a))$, $t \in [0, 1]$.

定理

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸域, $f \in C^{m+1}(D)$ (即 f 具有 $m+1$ 阶连续偏导数),
 $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. 则任给 $x \in D$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha.$$

Proof.

考虑一元函数 $\varphi(t) = f(a + t(x-a))$, $t \in [0, 1]$. φ 具有 $m+1$ 阶连续偏导数, 故由一元函数的 Taylor 公式, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta),$$

Proof.

利用数学归纳法不难证明

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x - a))(x - a)^\alpha.$$



Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.

欢迎访问 atzjg.net