



向量代数与空间解析几何

徐海峰整理

February 27, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容参考自下面的教材:

蒋国强等编著《高等数学》，机械工业出版社.

尤承业编著《解析几何》，北京大学出版社.

其他参考文献.

向量

向量的概念最初来自物理学.

向量的概念最初来自物理学.

许多物理量不仅有大小, 还有方向, 如位移、速度、加速度、力、力矩等, 称为向量 (或矢量) .

向量的概念最初来自物理学.

许多物理量不仅有大小, 还有方向, 如位移、速度、加速度、力、力矩等, 称为向量 (或矢量) .

一些物理量只有大小, 如面积、体积、长度、温度、质量等, 称为数量 (或标量) ;

向量的概念最初来自物理学.

许多物理量不仅有大小, 还有方向, 如位移、速度、加速度、力、力矩等, 称为向量 (或矢量) .

一些物理量只有大小, 如面积、体积、长度、温度、质量等, 称为数量 (或标量) ;

注

事实上, 任何标量也对应到实数轴上的一个矢量. (物理学家常喜欢用标量和矢量这两个词.)

向量的概念最初来自物理学.

许多物理量不仅有大小, 还有方向, 如位移、速度、加速度、力、力矩等, 称为向量 (或矢量) .

一些物理量只有大小, 如面积、体积、长度、温度、质量等, 称为数量 (或标量) ;

注

事实上, 任何标量也对应到实数轴上的一个矢量. (物理学家常喜欢用标量和矢量这两个词.)

对于物理学上的矢量, 如果忽略它们的物理意义, 只留下大小和方向两个要素, 则就抽象为数学中的向量概念.

向量

我们尝试给出向量的精确定义.

定义

粗略地讲, 既有大小, 又有方向的量称为**向量**.

向量

我们尝试给出向量的精确定义.

定义

粗略地讲, 既有大小, 又有方向的量称为**向量**.

这里并没有讲明向量的大小是如何计算的, 向量的方向又是什么.

向量

我们尝试给出向量的精确定义.

定义

粗略地讲, 既有大小, 又有方向的量称为**向量**.

这里并没有讲明向量的大小是如何计算的, 向量的方向又是什么.

定义

考虑平面上两点 A 和 B , 从 A 出发到 B 的有向线段称为**向量**, 记为 $\overrightarrow{AB}$. 当 $A = B$ 时, 此向量为零向量. 有时也用加箭头的单个字符如 $\vec{v}$ 或粗体 $\mathbf{v}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$.

向量

我们尝试给出向量的精确定义.

定义

粗略地讲, 既有大小, 又有方向的量称为**向量**.

这里并没有讲明向量的大小是如何计算的, 向量的方向又是什么.

定义

考虑平面上两点 A 和 B , 从 A 出发到 B 的有向线段称为**向量**, 记为 $\overrightarrow{AB}$. 当 $A = B$ 时, 此向量为零向量. 有时也用加箭头的单个字符如 $\vec{v}$ 或粗体 $\mathbf{v}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$.

这个定义中将整个有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 定义为向量. 但有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 由点对 (A, B) 惟一确定, 故向量也可定义为有序对 (A, B) . 这是两种定义方式.

数学上常用有向线段表示向量. 这里的线段由三维欧氏空间中的两点确定.

数学上常用有向线段表示向量. 这里的线段由三维欧氏空间中的两点确定. 如果不特别指明, 这里总是在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中讨论.

数学上常用有向线段表示向量. 这里的线段由三维欧氏空间中的两点确定. 如果不特别指明, 这里总是在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中讨论. 因此, 首先得简答介绍三维欧氏空间是什么.

数学上常用有向线段表示向量. 这里的线段由三维欧氏空间中的两点确定. 如果不特别指明, 这里总是在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中讨论. 因此, 首先得简答介绍三维欧氏空间是什么. 人们由经验得知, 我们生活的空间局部来看都是具有三个自由维度的空间, 三个维度的意思是其中的每个点都可以沿着前后、左右、上下六个方向自由移动, 并且线段的长度在平移和旋转下都保持不变.

实数轴构成一维欧氏空间, 记为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^1$.

向量的模长

欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中向量的**长度**或**模长**是这样定义的. 在 $\mathbb{R}^3$ 中任取一点作为原点 O . 将该向量平移到 O . 平移是不改变向量长度的.

定义

向量 $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量的**模**, 记为 $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}|$.

向量的模长

欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中向量的**长度**或**模长**是这样定义的. 在 $\mathbb{R}^3$ 中任取一点作为原点 O . 将该向量平移到 O . 平移是不改变向量长度的.

定义

向量 $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量的**模**, 记为 $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}|$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记作 $\vec{0}$.

向量的模长

欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中向量的**长度**或**模长**是这样定义的. 在 $\mathbb{R}^3$ 中任取一点作为原点 O . 将该向量平移到 O . 平移是不改变向量长度的.

定义

向量 $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量的**模**, 记为 $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}|$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记作 $\vec{0}$.

定义

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 可以组成一个平行四边形, 且是该平行四边形的对边, 方向相同, 则称这两个向量是等价的. 记 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

向量的模长

欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中向量的**长度**或**模长**是这样定义的. 在 $\mathbb{R}^3$ 中任取一点作为原点 O . 将该向量平移到 O . 平移是不改变向量长度的.

定义

向量 $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量的**模**, 记为 $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}|$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记作 $\vec{0}$.

定义

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 可以组成一个平行四边形, 且是该平行四边形的对边, 方向相同, 则称这两个向量是等价的. 记 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

定义

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在平面上若保持方向和大小不变运动到 $\overrightarrow{A'B'}$, A 运动到 A' , B 运动到 B' , 这样的运动称为**平移**.

在这里, 我们考虑平面或三维空间中的向量,

在这里, 我们考虑平面或三维空间中的向量, 且仅考虑等价的向量.

在这里, 我们考虑平面或三维空间中的向量, 且仅考虑等价的向量.
若建立直角坐标系, 则任何向量都等价到从原点出发的一个向量.

在这里, 我们考虑平面或三维空间中的向量, 且仅考虑等价的向量.
若建立直角坐标系, 则任何向量都等价到从原点出发的一个向量.
有的书将这种与起点无关的向量称为**自由向量**.

为简单起见, 我们先考虑平面中向量的运算.

向量的加减法

为简单起见, 我们先考虑平面中向量的运算. 这里的向量可以从原点出发, 也可以平移到任何地方. 平移后的向量仍等于原来的向量, 因此用同一个字母表示.

向量的加减法

为简单起见, 我们先考虑平面中向量的运算. 这里的向量可以从原点出发, 也可以平移到任何地方. 平移后的向量仍等于原来的向量, 因此用同一个字母表示. 向量 $\vec{v}$ 也对应到 (建立直角坐标系的) 平面上惟一的点 A , 使得 $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.

定义

设 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. 向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 确定平行四边形 $OABC$, 则 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 定义为 $\overrightarrow{OC}$.

向量的加减法

为简单起见, 我们先考虑平面中向量的运算. 这里的向量可以从原点出发, 也可以平移到任何地方. 平移后的向量仍等于原来的向量, 因此用同一个字母表示. 向量 $\vec{v}$ 也对应到 (建立直角坐标系的) 平面上惟一的点 A , 使得 $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.

定义

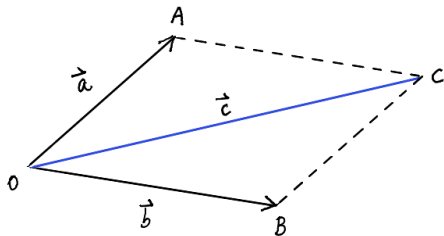
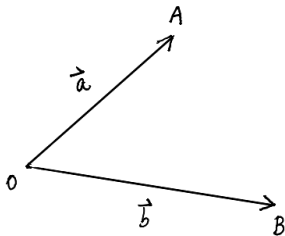
设 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. 向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 确定平行四边形 $OABC$, 则 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 定义为 $\overrightarrow{OC}$.

这个被称为平行四边形法则.

向量的加法（平行四边形法则）

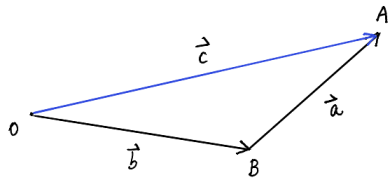
加法

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



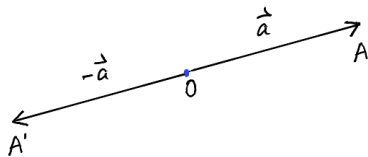
平行四边形法则

向量的加法（三角形法则）



三角形法则

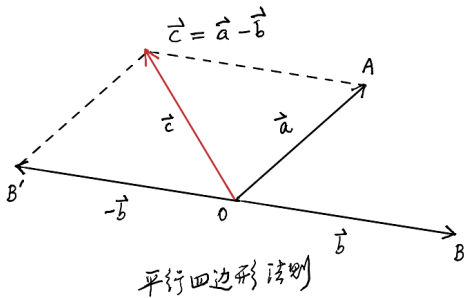
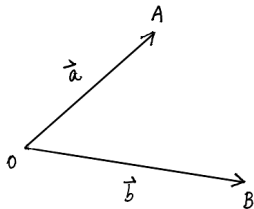
负向量.



向量的减法（平行四边形法则）

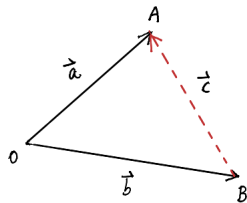
减法

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$



向量的减法（三角形法则）

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$



三角形法则

命题

向量的加法满足交换律和结合律.

- (1) 交换律 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$;
- (2) 结合律 $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

向量加法满足的运算律

命题

向量的加法满足交换律和结合律.

- (1) 交换律 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$;
- (2) 结合律 $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

Proof.

由平行四边形法则立即得到交换律.

向量加法满足的运算律

命题

向量的加法满足交换律和结合律.

- (1) 交换律 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$;
- (2) 结合律 $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

Proof.

由平行四边形法则立即得到交换律. 而证明结合律使用三角形法则较为方便. □

加法的结合律

Proof.

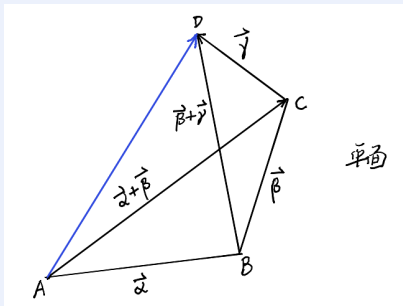


Figure 1: 平面

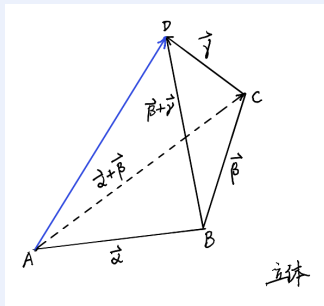


Figure 2: 立体



有限个向量的加法

假设有 n 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, 由于向量的加法满足交换律和结合律, 故它们的和就简记为

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n .$$

有限个向量的加法

假设有 n 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, 由于向量的加法满足交换律和结合律, 故它们的和就简记为

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n .$$

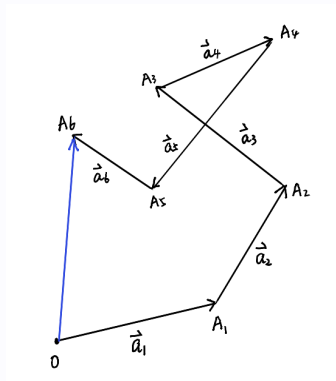
所得和向量即自 $\vec{a}_1$ 起点指向 $\vec{a}_n$ 终点的向量.

有限个向量的加法

假设有 n 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, 由于向量的加法满足交换律和结合律, 故它们的和就简记为

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n .$$

所得和向量即自 $\vec{a}_1$ 起点指向 $\vec{a}_n$ 终点的向量.



向量加法的不等式

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个向量, 则由三角形两边之和大于第三边的原理, 可得

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

向量加法的不等式

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个向量, 则由三角形两边之和大于第三边的原理, 可得

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

向量加法的不等式

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个向量, 则由三角形两边之和大于第三边的原理, 可得

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

其中等号在 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 同向或反向时成立.

向量加法的不等式

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个向量, 则由三角形两边之和大于第三边的原理, 可得

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

其中等号在 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 同向或反向时成立.

我们约定, 零向量的方向是任意的, 与任意非零向量同向或反向.

定义

向量 $\vec{a}$ 和实数 λ 的乘积记作 $\lambda\vec{a}$. 定义为一个与 $\vec{a}$ 方向相同（当 $\lambda \geq 0$ 时）或相反（当 $\lambda \leq 0$ 时），且模长等于 $|\lambda||\vec{a}|$ 的向量.

定义

向量 $\vec{a}$ 和实数 λ 的乘积记作 $\lambda\vec{a}$. 定义为一个与 $\vec{a}$ 方向相同（当 $\lambda \geq 0$ 时）或相反（当 $\lambda \leq 0$ 时），且模长等于 $|\lambda||\vec{a}|$ 的向量.

$\lambda\vec{a}$ 的几何意义是将 $\vec{a}$ 进行伸缩变换得到的向量, 伸缩因子为 λ .

定义

向量 $\vec{a}$ 和实数 λ 的乘积记作 $\lambda\vec{a}$. 定义为一个与 $\vec{a}$ 方向相同（当 $\lambda \geq 0$ 时）或相反（当 $\lambda \leq 0$ 时），且模长等于 $|\lambda||\vec{a}|$ 的向量.

$\lambda\vec{a}$ 的几何意义是将 $\vec{a}$ 进行伸缩变换得到的向量，伸缩因子为 λ .

$\vec{v}$ 方向的单位向量记为 $\vec{v}_0$, 即

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

向量数乘的运算法则

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为向量, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则满足

- 结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
- 分配律 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

向量数乘的运算法则

设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为向量, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则满足

- 结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
- 分配律 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

Proof.

分配律的第一个公式可用相似三角形的知识证明, 第二个公式直接用向量加法的三角形法则. □

命题

设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则向量 $\vec{b}$ 平行于向量 $\vec{a}$ 当且仅当存在惟一的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

命题

设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则向量 $\vec{b}$ 平行于向量 $\vec{a}$ 当且仅当存在惟一的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Proof.

命题的充分性是显然的. 故只需证必要性.

命题

设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则向量 $\vec{b}$ 平行于向量 $\vec{a}$ 当且仅当存在惟一的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Proof.

命题的充分性是显然的. 故只需证必要性.

($\Rightarrow$) 设 $\vec{b} \parallel \vec{a}$, 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时, 取 $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$;

命题

设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则向量 $\vec{b}$ 平行于向量 $\vec{a}$ 当且仅当存在惟一的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Proof.

命题的充分性是显然的. 故只需证必要性.

($\Rightarrow$) 设 $\vec{b} \parallel \vec{a}$, 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时, 取 $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时, 取 $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

命题

设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则向量 $\vec{b}$ 平行于向量 $\vec{a}$ 当且仅当存在惟一的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Proof.

命题的充分性是显然的. 故只需证必要性.

($\Rightarrow$) 设 $\vec{b} \parallel \vec{a}$, 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时, 取 $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时, 取 $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. 这样, 总有 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向, 并且

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

命题

设向量 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则向量 $\vec{b}$ 平行于向量 $\vec{a}$ 当且仅当存在惟一的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Proof.

命题的充分性是显然的. 故只需证必要性.

($\Rightarrow$) 设 $\vec{b} \parallel \vec{a}$, 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时, 取 $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时, 取 $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. 这样, 总有 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向, 并且

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

因此 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.



Proof.

下证实数 λ 的惟一性.

Proof.

下证实数 λ 的惟一性. 设存在实数 λ_1 和 λ_2 , 使得

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a} = \lambda_2 \vec{a},$$

则

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} - \lambda_2 \vec{a} = \vec{0}.$$

Proof.

下证实数 λ 的惟一性. 设存在实数 λ_1 和 λ_2 , 使得

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a} = \lambda_2 \vec{a},$$

则

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} - \lambda_2 \vec{a} = \vec{0}.$$

由于 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 故 $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, 即 $\lambda_1 = \lambda_2$.



三维空间中向量的坐标表示

三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $Oxyz$, x 轴方向的单位向量记为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量记为 $\vec{j}$, z 轴方向的单位向量记为 $\vec{k}$.

三维空间中向量的坐标表示

三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $Oxyz$, x 轴方向的单位向量记为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量记为 $\vec{j}$, z 轴方向的单位向量记为 $\vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的终点分别是 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

三维空间中向量的坐标表示

三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $Oxyz$, x 轴方向的单位向量记为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量记为 $\vec{j}$, z 轴方向的单位向量记为 $\vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的终点分别是 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

由于向量和它的终点是一一对应的, 故也可用终点的坐标表示该向量, 即写为

$$\vec{i} \mapsto (1, 0, 0), \quad \vec{j} \mapsto (0, 1, 0), \quad \vec{k} \mapsto (0, 0, 1).$$

三维空间中向量的坐标表示

三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $Oxyz$, x 轴方向的单位向量记为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量记为 $\vec{j}$, z 轴方向的单位向量记为 $\vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的终点分别是 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

由于向量和它的终点是一一对应的, 故也可用终点的坐标表示该向量, 即写为

$$\vec{i} \mapsto (1, 0, 0), \quad \vec{j} \mapsto (0, 1, 0), \quad \vec{k} \mapsto (0, 0, 1).$$

显然, $\lambda \vec{i}$ 对应到 $(\lambda, 0, 0)$.

三维空间中向量的坐标表示

三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $Oxyz$, x 轴方向的单位向量记为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量记为 $\vec{j}$, z 轴方向的单位向量记为 $\vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的终点分别是 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

由于向量和它的终点是一一对应的, 故也可用终点的坐标表示该向量, 即写为

$$\vec{i} \mapsto (1, 0, 0), \quad \vec{j} \mapsto (0, 1, 0), \quad \vec{k} \mapsto (0, 0, 1).$$

显然, $\lambda \vec{i}$ 对应到 $(\lambda, 0, 0)$. 因此定义 $\lambda(1, 0, 0) = (\lambda, 0, 0)$ 是合理的.

三维空间中向量的坐标表示

三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $Oxyz$, x 轴方向的单位向量记为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量记为 $\vec{j}$, z 轴方向的单位向量记为 $\vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的终点分别是 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

由于向量和它的终点是一一对应的, 故也可用终点的坐标表示该向量, 即写为

$$\vec{i} \mapsto (1, 0, 0), \quad \vec{j} \mapsto (0, 1, 0), \quad \vec{k} \mapsto (0, 0, 1).$$

显然, $\lambda \vec{i}$ 对应到 $(\lambda, 0, 0)$. 因此定义 $\lambda(1, 0, 0) = (\lambda, 0, 0)$ 是合理的. 类似地, 定义 $\lambda(0, 1, 0) = (0, \lambda, 0)$, $\lambda(0, 0, 1) = (0, 0, \lambda)$.

三维空间中向量的坐标表示

三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取直角坐标系 $Oxyz$, x 轴方向的单位向量记为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量记为 $\vec{j}$, z 轴方向的单位向量记为 $\vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的终点分别是 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

由于向量和它的终点是一一对应的, 故也可用终点的坐标表示该向量, 即写为

$$\vec{i} \mapsto (1, 0, 0), \quad \vec{j} \mapsto (0, 1, 0), \quad \vec{k} \mapsto (0, 0, 1).$$

显然, $\lambda\vec{i}$ 对应到 $(\lambda, 0, 0)$. 因此定义 $\lambda(1, 0, 0) = (\lambda, 0, 0)$ 是合理的. 类似地, 定义 $\lambda(0, 1, 0) = (0, \lambda, 0)$, $\lambda(0, 0, 1) = (0, 0, \lambda)$.

后面我们可以将“对应到”这个符号 $\mapsto$ 改写为 $=$.

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

过点 M 作 Oxy 平面的垂线 MH , $H = (x, y, 0)$ 为垂足. 过 H 分别作 x -轴和 y -轴的垂线 HP 和 HQ .

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

过点 M 作 Oxy 平面的垂线 MH , $H = (x, y, 0)$ 为垂足. 过 H 分别作 x -轴和 y -轴的垂线 HP 和 HQ . P 和 Q 的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$.

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

过点 M 作 Oxy 平面的垂线 MH , $H = (x, y, 0)$ 为垂足. 过 H 分别作 x -轴和 y -轴的垂线 HP 和 HQ . P 和 Q 的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$. 将 $\overrightarrow{HM}$ 平移到原点 O , 即对应到 z -轴上的向量为 $\overrightarrow{OR}$. 终点 $R = (0, 0, z)$.

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

过点 M 作 Oxy 平面的垂线 MH , $H = (x, y, 0)$ 为垂足. 过 H 分别作 x -轴和 y -轴的垂线 HP 和 HQ . P 和 Q 的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$. 将 $\overrightarrow{HM}$ 平移到原点 O , 即对应到 z -轴上的向量为 $\overrightarrow{OR}$. 终点 $R = (0, 0, z)$.

根据前面两个平行向量之间关系的命题, 可得

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OR} = z\vec{k},$$

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

过点 M 作 Oxy 平面的垂线 MH , $H = (x, y, 0)$ 为垂足. 过 H 分别作 x -轴和 y -轴的垂线 HP 和 HQ . P 和 Q 的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$. 将 $\overrightarrow{HM}$ 平移到原点 O , 即对应到 z -轴上的向量为 $\overrightarrow{OR}$. 终点 $R = (0, 0, z)$.

根据前面两个平行向量之间关系的命题, 可得

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OR} = z\vec{k},$$

另一方面, 根据向量加法的定义,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

过点 M 作 Oxy 平面的垂线 MH , $H = (x, y, 0)$ 为垂足. 过 H 分别作 x -轴和 y -轴的垂线 HP 和 HQ . P 和 Q 的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$. 将 $\overrightarrow{HM}$ 平移到原点 O , 即对应到 z -轴上的向量为 $\overrightarrow{OR}$. 终点 $R = (0, 0, z)$.

根据前面两个平行向量之间关系的命题, 可得

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OR} = z\vec{k},$$

另一方面, 根据向量加法的定义,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

此式称为向量 $\vec{a}$ 的坐标分解式.

现在设向量 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 的起点为 $O = (0, 0, 0)$, 终点为 $M = (x, y, z)$, 即 $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

过点 M 作 Oxy 平面的垂线 MH , $H = (x, y, 0)$ 为垂足. 过 H 分别作 x -轴和 y -轴的垂线 HP 和 HQ . P 和 Q 的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$. 将 $\overrightarrow{HM}$ 平移到原点 O , 即对应到 z -轴上的向量为 $\overrightarrow{OR}$. 终点 $R = (0, 0, z)$.

根据前面两个平行向量之间关系的命题, 可得

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OR} = z\vec{k},$$

另一方面, 根据向量加法的定义,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

此式称为向量 $\vec{a}$ 的坐标分解式.

如果将 $\overrightarrow{OM}$ 对应到 (x, y, z) , $\vec{i}$ 对应到 $(1, 0, 0)$, $\vec{j}$ 对应到 $(0, 1, 0)$, $\vec{k}$ 对应到 $(0, 0, 1)$, 则自然地定义

$$(x, y, z) := x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

如果将 $\overrightarrow{OM}$ 对应到 (x, y, z) , $\vec{i}$ 对应到 $(1, 0, 0)$, $\vec{j}$ 对应到 $(0, 1, 0)$, $\vec{k}$ 对应到 $(0, 0, 1)$, 则自然地定义

$$(x, y, z) := x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

也即对于集合 $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ 中的点 (x, y, z) , 也有类似的分解式.

给定

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

投影

定义

设点 A 是直线 ℓ 外一点, 过点 A 作 AA' 垂直 ℓ 于 A' , 则称 A' 是 A 在直线 ℓ 上的投影, 记为 $A' = \mathbf{p}_\ell(A)$.

定义

设点 A 是直线 ℓ 外一点, 过点 A 作 AA' 垂直 ℓ 于 A' , 则称 A' 是 A 在直线 ℓ 上的投影, 记为 $A' = \mathbf{p}_\ell(A)$.

若 $A \in \ell$, 则 A 本身即为 A 在直线 ℓ 上的投影.

定义

设点 A 是平面 π 外一点, 过点 A 作 AA' 垂直 π 于 A' , 则称 A' 是 A 在平面 π 上的投影, 记为 $A' = \mathbf{p}_{\pi}(A)$.

定义

设点 A 是平面 π 外一点, 过点 A 作 AA' 垂直 π 于 A' , 则称 A' 是 A 在平面 π 上的投影, 记为 $A' = \mathbf{p}_{\pi}(A)$.

若 $A \in \pi$, 则 A 本身即为 A 在平面 π 上的投影.

定义

设向量 $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, 点 A 和 B 在直线 ℓ 上的投影分别为 A' 和 B' , 称 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ 在直线 ℓ 上的投影向量. 记为

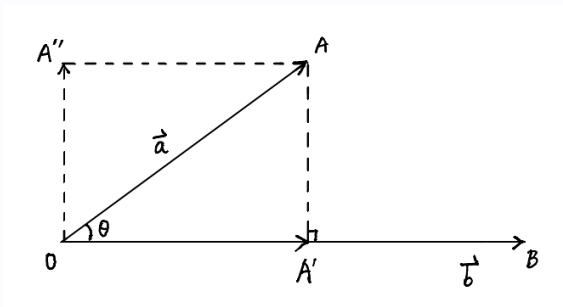
$$\overrightarrow{A'B'} = \mathbf{p}_{\ell} \overrightarrow{AB}.$$

向量在某个向量上的投影向量

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. 过点 A 作直线 OB 的垂线 AA' , A' 是垂足, 即 $\overrightarrow{AA'}$ 是向量 $\vec{a}$ 关于 $\vec{b}$ 所在直线的投影向量. 作 $OA'' \parallel A'A$, 且 $|OA''| = |A'A|$

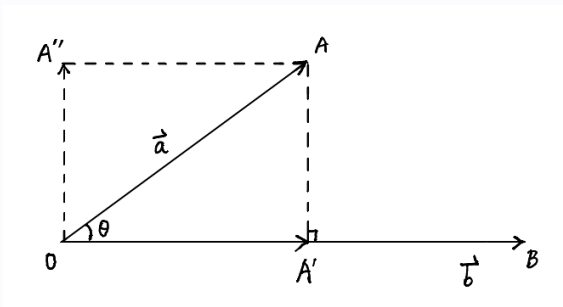
向量在某个向量上的投影向量

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. 过点 A 作直线 OB 的垂线 AA' , A' 是垂足, 即 $\overrightarrow{AA'}$ 是向量 $\vec{a}$ 关于 $\vec{b}$ 所在直线的投影向量. 作 $OA'' \parallel A'A$, 且 $|OA''| = |A'A|$

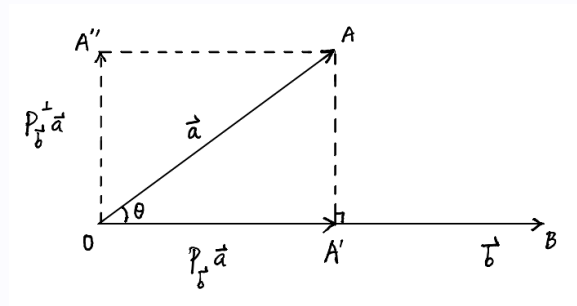


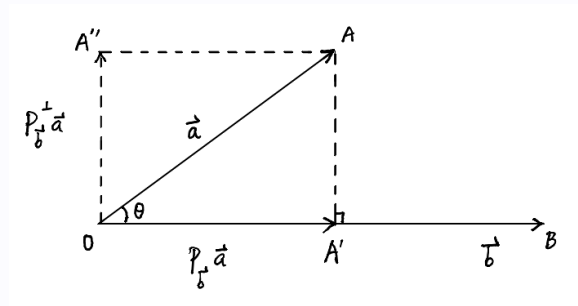
向量在某个向量上的投影向量

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. 过点 A 作直线 OB 的垂线 AA' , A' 是垂足, 即 $\overrightarrow{AA'}$ 是向量 $\vec{a}$ 关于 $\vec{b}$ 所在直线的投影向量. 作 $OA'' \parallel A'A$, 且 $|OA''| = |A'A|$



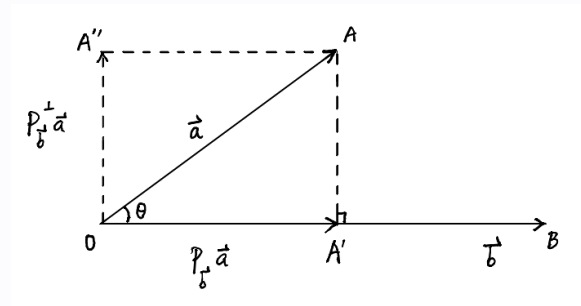
称 $\overrightarrow{OA'}$ 为 $\vec{a}$ 关于 $\vec{b}$ 的内投影向量. 称 $\overrightarrow{OA''}$ 或 $\overrightarrow{A'A}$ 为 $\vec{a}$ 关于 $\vec{b}$ 的外投影向量.





记

$$\mathbf{p}_b(\vec{a}) = \overrightarrow{OA'}, \quad \mathbf{p}_b^\perp(\vec{a}) = \overrightarrow{A'A}.$$

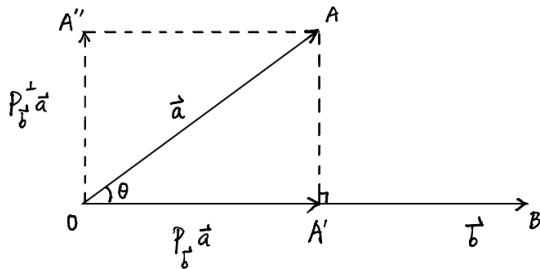


记

$$\mathbf{p}_b(\vec{a}) = \overrightarrow{OA'}, \quad \mathbf{p}_b^\perp(\vec{a}) = \overrightarrow{A'A}.$$

因此

$$\vec{a} = \mathbf{p}_b(\vec{a}) + \mathbf{p}_b^\perp(\vec{a}).$$



记

$$\mathbf{p}_b(\vec{a}) = \overrightarrow{OA'}, \quad \mathbf{p}_b^\perp(\vec{a}) = \overrightarrow{A'A}.$$

因此

$$\vec{a} = \mathbf{p}_b(\vec{a}) + \mathbf{p}_b^\perp(\vec{a}).$$

$$|\vec{a}| \cdot |\cos \theta| = |\mathbf{p}_b(\vec{a})|, \quad |\vec{a}| \sin \theta = |\mathbf{p}_b^\perp(\vec{a})|$$

由于 $\mathbf{p}_{\vec{b}}(\vec{a})$ 与 $\vec{b}$ 平行, 故存在实数 λ , 使得

$$\mathbf{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \lambda \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

由于 $\mathbf{p}_{\vec{b}}(\vec{a})$ 与 $\vec{b}$ 平行, 故存在实数 λ , 使得

$$\mathbf{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \lambda \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

称 λ 为向量 $\vec{a}$ 关于 $\vec{b}$ 的投影, 记作 $\text{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

由于 $\mathbf{p}_{\vec{b}}(\vec{a})$ 与 $\vec{b}$ 平行, 故存在实数 λ , 使得

$$\mathbf{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \lambda \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

称 λ 为向量 $\vec{a}$ 关于 $\vec{b}$ 的投影, 记作 $\text{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$. 于是

$$\text{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

两向量之和在某轴上的投影等于此二向量在该轴上投影之和.

命题

设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, 则有

$$\text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{b}) + \text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{c}).$$

两向量之和在某轴上的投影等于此二向量在该轴上投影之和.

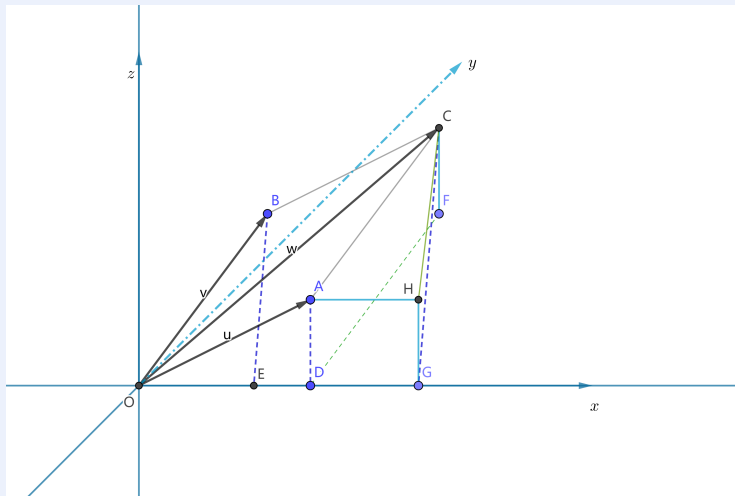
命题

设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, 则有

$$\text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{b}) + \text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{c}).$$

证明可见问题2945.

Proof.



证明

Proof.

不妨记 $\vec{u} = \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{c}$.

证明

Proof.

不妨记 $\vec{u} = \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{c}$.

将 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 起始点作为原点, 以 $\vec{a}$ 所在的轴作为 x 轴, x 轴正向与 $\vec{a}$ 一致, 建立直角坐标系, 如图. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

证明

Proof.

不妨记 $\vec{u} = \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{c}$.

将 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 起始点作为原点, 以 $\vec{a}$ 所在的轴作为 x 轴, x 轴正向与 $\vec{a}$ 一致, 建立直角坐标系, 如图. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

过 A, B, C 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 D, E, G . 则

$$x_D = \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{u}, \quad x_E = \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{v}, \quad x_G = \text{Prj}_{\vec{a}} (\vec{u} + \vec{v}).$$

证明

Proof.

不妨记 $\vec{u} = \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{c}$.

将 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 起始点作为原点, 以 $\vec{a}$ 所在的轴作为 x 轴, x 轴正向与 $\vec{a}$ 一致, 建立直角坐标系, 如图. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

过 A, B, C 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 D, E, G . 则

$$x_D = \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{u}, \quad x_E = \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{v}, \quad x_G = \text{Prj}_{\vec{a}} (\vec{u} + \vec{v}).$$

于是即要证明 $x_G = x_D + x_E$.

证明

Proof.

不妨记 $\vec{u} = \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{c}$.

将 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 起始点作为原点, 以 $\vec{a}$ 所在的轴作为 x 轴, x 轴正向与 $\vec{a}$ 一致, 建立直角坐标系, 如图. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

过 A, B, C 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 D, E, G . 则

$$x_D = \text{Prj}_{\vec{a}}\vec{u}, \quad x_E = \text{Prj}_{\vec{a}}\vec{v}, \quad x_G = \text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{u} + \vec{v}).$$

于是即要证明 $x_G = x_D + x_E$.

CG, HG 都垂直于 x 轴, 故 x 轴垂直 CH . 而 AH 与 x 轴平行, 故 $AH \perp CH$.

证明

Proof.

不妨记 $\vec{u} = \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{c}$.

将 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 起始点作为原点, 以 $\vec{a}$ 所在的轴作为 x 轴, x 轴正向与 $\vec{a}$ 一致, 建立直角坐标系, 如图. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

过 A, B, C 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 D, E, G . 则

$$x_D = \text{Prj}_{\vec{a}}\vec{u}, \quad x_E = \text{Prj}_{\vec{a}}\vec{v}, \quad x_G = \text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{u} + \vec{v}).$$

于是即要证明 $x_G = x_D + x_E$.

CG, HG 都垂直于 x 轴, 故 x 轴垂直 CH . 而 AH 与 x 轴平行, 故 $AH \perp CH$.

容易证明 $\text{Rt}\triangle OEB$ 和 $\text{Rt}\triangle AHC$ 全等, 因为 $|OB| = |AC|$, 且 $\angle BOE = \angle CAH$.

证明

Proof.

不妨记 $\vec{u} = \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{c}$.

将 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 起始点作为原点, 以 $\vec{a}$ 所在的轴作为 x 轴, x 轴正向与 $\vec{a}$ 一致, 建立直角坐标系, 如图. $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, 则 $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

过 A, B, C 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 D, E, G . 则

$$x_D = \text{Prj}_{\vec{a}}\vec{u}, \quad x_E = \text{Prj}_{\vec{a}}\vec{v}, \quad x_G = \text{Prj}_{\vec{a}}(\vec{u} + \vec{v}).$$

于是即要证明 $x_G = x_D + x_E$.

CG, HG 都垂直于 x 轴, 故 x 轴垂直 CH . 而 AH 与 x 轴平行, 故 $AH \perp CH$.

容易证明 $\text{Rt}\triangle OEB$ 和 $\text{Rt}\triangle AHC$ 全等, 因为 $|OB| = |AC|$, 且 $\angle BOE = \angle CAH$.

因此, $|OE| = |AH|$. 而 $|AH| = |DG|$, 故 $|OE| = |DG|$. 证毕. □

类似地, 对于内投影和外投影也有相应的结论.

类似地, 对于内投影和外投影也有相应的结论.

命题

设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{P}_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{P}_{\vec{u}}\vec{a} + \mathbf{P}_{\vec{u}}\vec{b},$$

$$\mathbf{P}_{\vec{u}}^{\perp}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathbf{P}_{\vec{u}}^{\perp}\vec{a} + \mathbf{P}_{\vec{u}}^{\perp}\vec{b}.$$

内积

设 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, 向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的内积定义为实数 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$, 以符号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 或 $(\vec{a}, \vec{b})$ 记之. 即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta.$$

命题

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

投影和内积的关系

命题

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Proof.

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

而

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

故

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$



应用

命题

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 $d := \text{dist}(P_0, \pi)$ 为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Proof.

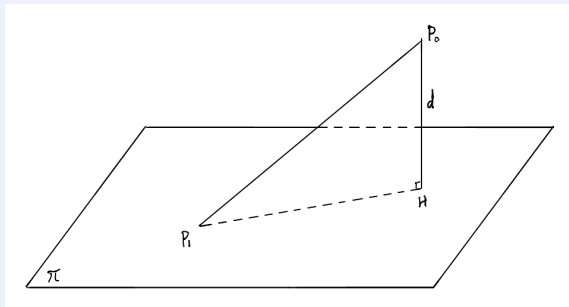
若 $P_0 \in \pi$, 则 $\text{dist}(P_0, \pi) = 0$, 而 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, 故公式成立.

Proof.

若 $P_0 \in \pi$, 则 $\text{dist}(P_0, \pi) = 0$, 而 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, 故公式成立. 设 P_0 在平面 π 之外.

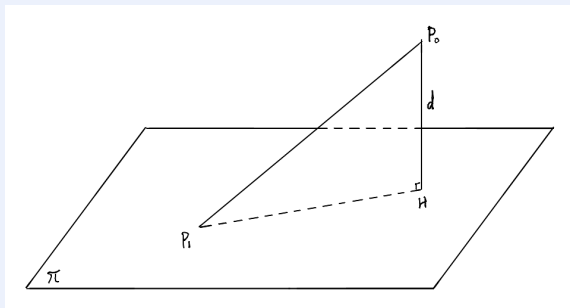
Proof.

若 $P_0 \in \pi$, 则 $\text{dist}(P_0, \pi) = 0$, 而 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, 故公式成立. 设 P_0 在平面 π 之外.



Proof.

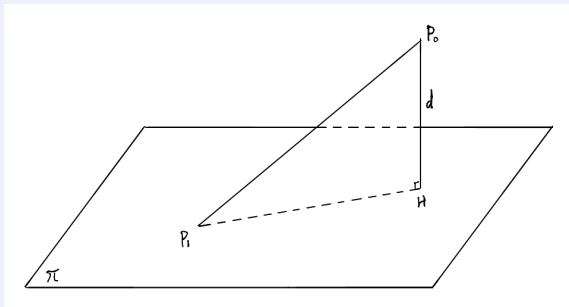
若 $P_0 \in \pi$, 则 $\text{dist}(P_0, \pi) = 0$, 而 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, 故公式成立. 设 P_0 在平面 π 之外.



任取点 $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$, 那么 $\text{dist}(P_0, \pi)$ 就是向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在平面法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$ 上的投影的绝对值,

Proof.

若 $P_0 \in \pi$, 则 $\text{dist}(P_0, \pi) = 0$, 而 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, 故公式成立. 设 P_0 在平面 π 之外.



任取点 $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$, 那么 $\text{dist}(P_0, \pi)$ 就是向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在平面法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$ 上的投影的绝对值, 即

$$d = |\text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0}|.$$

Proof.

故

$$d = |\text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0}| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

而 $\overrightarrow{P_1 P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $\vec{n} = (A, B, C)$,

Proof.

故

$$d = |\text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0}| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

而 $\overrightarrow{P_1 P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, 故

$$\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)$$

Proof.

故

$$d = |\text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0}| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

而 $\overrightarrow{P_1 P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, 故

$$\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)$$

注意到 $P_1 \in \pi$, 故 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$,

Proof.

故

$$d = |\text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0}| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

而 $\overrightarrow{P_1 P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, 故

$$\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)$$

注意到 $P_1 \in \pi$, 故 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, 于是

$$\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D,$$

Proof.

故

$$d = |\text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0}| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

而 $\overrightarrow{P_1 P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, 故

$$\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)$$

注意到 $P_1 \in \pi$, 故 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, 于是

$$\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D,$$

因此

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



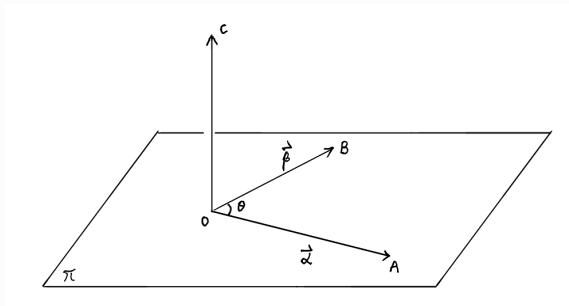
向量积

向量积或叉积

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个不平行的非零向量, 如下图所示. 夹角为 $\theta = \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) > 0$, 记所张成的平面为 $\pi = \text{span}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

向量积或叉积

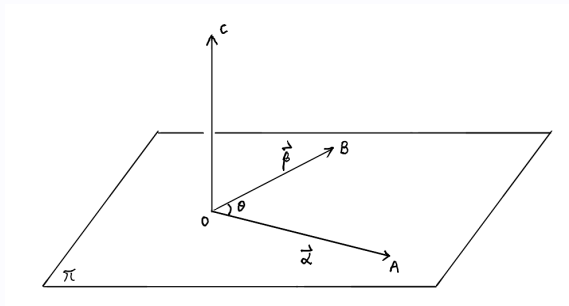
设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个不平行的非零向量, 如下图所示. 夹角为 $\theta = \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) > 0$, 记所张成的平面为 $\pi = \text{span}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.



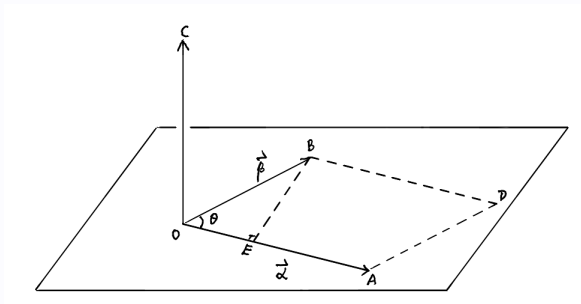
定义这样一个向量 $\overrightarrow{OC}$, 其大小为 $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \theta$, 其方向由右手法则确定. 即使用右手并拢的四个手指从 $\vec{\alpha}$ 逆时针旋转 θ 角到达 $\vec{\beta}$ 方向, 大拇指方向即规定为该向量的方向.

向量积或叉积

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个不平行的非零向量, 如下图所示. 夹角为 $\theta = \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) > 0$, 记所张成的平面为 $\pi = \text{span}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.



定义这样一个向量 $\overrightarrow{OC}$, 其大小为 $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \theta$, 其方向由右手法则确定. 即使用右手并拢的四个手指从 $\vec{\alpha}$ 逆时针旋转 θ 角到达 $\vec{\beta}$ 方向, 大拇指方向即规定为该向量的方向.



定义

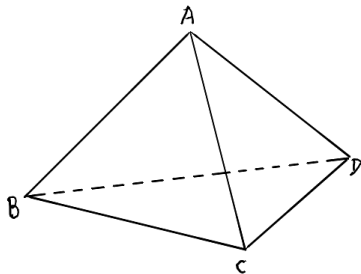
设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 称 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ 为 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 的混合积.

习题

习题

习题

设 $ABCD$ 是一个四面体, 若两组对边分别垂直, 则第三组对边也垂直, 并且这三组对边的长度的平方和相等.

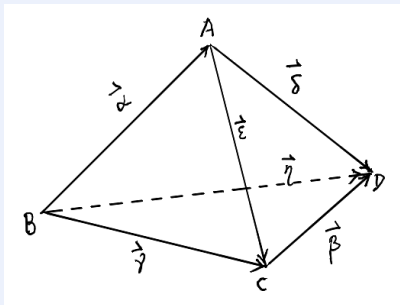


Proof.

记 $\alpha = \overrightarrow{BA}$, $\beta = \overrightarrow{CD}$, $\gamma = \overrightarrow{BC}$, $\delta = \overrightarrow{AD}$, $\varepsilon = \overrightarrow{AC}$, $\eta = \overrightarrow{BD}$.

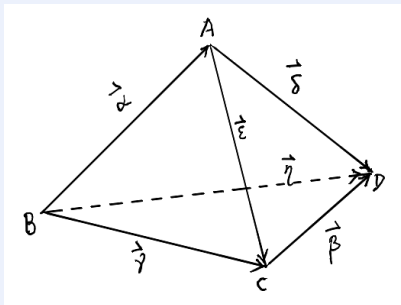
Proof.

记 $\alpha = \overrightarrow{BA}$, $\beta = \overrightarrow{CD}$, $\gamma = \overrightarrow{BC}$, $\delta = \overrightarrow{AD}$, $\varepsilon = \overrightarrow{AC}$, $\eta = \overrightarrow{BD}$.



Proof.

记 $\alpha = \overrightarrow{BA}$, $\beta = \overrightarrow{CD}$, $\gamma = \overrightarrow{BC}$, $\delta = \overrightarrow{AD}$, $\varepsilon = \overrightarrow{AC}$, $\eta = \overrightarrow{BD}$.



不妨设 $\alpha \perp \beta$, $\gamma \perp \delta$, 要证 $\varepsilon \perp \eta$, 且

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = |\varepsilon|^2 + |\eta|^2.$$



Proof.

(1) 根据设定,

$$\varepsilon = \gamma - \alpha = \delta - \beta,$$

$$\eta = \gamma + \beta = \alpha + \delta.$$

Proof.

(1) 根据设定,

$$\varepsilon = \gamma - \alpha = \delta - \beta,$$

$$\eta = \gamma + \beta = \alpha + \delta.$$

于是 $\beta - \alpha = \delta - \gamma$,

Proof.

(1) 根据设定,

$$\varepsilon = \gamma - \alpha = \delta - \beta,$$

$$\eta = \gamma + \beta = \alpha + \delta.$$

于是 $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, 故

$$\begin{aligned}\varepsilon \cdot \eta &= (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma + \beta) \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma - \alpha \cdot \beta \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot (\beta - \alpha) \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot (\delta - \gamma) \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot \delta - |\gamma|^2 \\&= 0.\end{aligned}$$

Proof.

(1) 根据设定,

$$\varepsilon = \gamma - \alpha = \delta - \beta,$$

$$\eta = \gamma + \beta = \alpha + \delta.$$

于是 $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, 故

$$\begin{aligned}\varepsilon \cdot \eta &= (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma + \beta) \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma - \alpha \cdot \beta \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot (\beta - \alpha) \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot (\delta - \gamma) \\&= |\gamma|^2 + \gamma \cdot \delta - |\gamma|^2 \\&= 0.\end{aligned}$$

这里用到了条件 $\alpha \cdot \beta = 0 = \gamma \cdot \delta$.

□

Proof.

(2) 利用 $\varepsilon \cdot \eta = 0$ 以及 $\eta - \varepsilon = (\alpha + \delta) - (\delta - \beta) = \alpha + \beta$, 我们有

$$\begin{aligned} |\eta|^2 + |\varepsilon|^2 &= (\eta - \varepsilon) \cdot (\eta - \varepsilon) \\ &= (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2. \end{aligned}$$

Proof.

(2) 利用 $\varepsilon \cdot \eta = 0$ 以及 $\eta - \varepsilon = (\alpha + \delta) - (\delta - \beta) = \alpha + \beta$, 我们有

$$\begin{aligned} |\eta|^2 + |\varepsilon|^2 &= (\eta - \varepsilon) \cdot (\eta - \varepsilon) \\ &= (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2. \end{aligned}$$

同理, 利用 $\gamma \cdot \delta = 0$ 以及 $\gamma - \delta = \alpha - \beta$, 得

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 + |\delta|^2 &= (\gamma - \delta) \cdot (\gamma - \delta) \\ &= (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2. \end{aligned}$$

Proof.

(2) 利用 $\varepsilon \cdot \eta = 0$ 以及 $\eta - \varepsilon = (\alpha + \delta) - (\delta - \beta) = \alpha + \beta$, 我们有

$$\begin{aligned} |\eta|^2 + |\varepsilon|^2 &= (\eta - \varepsilon) \cdot (\eta - \varepsilon) \\ &= (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2. \end{aligned}$$

同理, 利用 $\gamma \cdot \delta = 0$ 以及 $\gamma - \delta = \alpha - \beta$, 得

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 + |\delta|^2 &= (\gamma - \delta) \cdot (\gamma - \delta) \\ &= (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2. \end{aligned}$$

这里都用到了 $\alpha \cdot \beta = 0$.

□

二重叉积

二重叉积

定义

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 称 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ 和 $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ 为二重叉积.

二重叉积

定义

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 称 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ 和 $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ 为二重叉积.

注意 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ 一般不等于 $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$.

二重叉积

定义

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 称 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ 和 $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ 为二重叉积.

注意 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ 一般不等于 $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$. 即对于二重叉积, 结合律不成立.

二重叉积

定义

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 称 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ 和 $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ 为二重叉积.

注意 $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ 一般不等于 $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$. 即对于二重叉积, 结合律不成立.

例

设 $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \neq \vec{0}$, $\vec{\gamma}$ 与 $\vec{\alpha}$ 不平行. 则 $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\alpha} \times \vec{\alpha} = \vec{0}$, 从而

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \vec{0}.$$

但 $\vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\gamma} \neq \vec{0}$, 从而

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \neq \vec{0}$$

二重叉积的性质

命题

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 则

$$(1) (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha},$$

$$(2) \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}.$$

二重叉积的性质

命题

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 则

$$(1) (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha},$$

$$(2) \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}.$$

Proof.

(2) 可以由 (1) 直接推出.

二重叉积的性质

命题

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 则

$$(1) (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha},$$

$$(2) \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}.$$

Proof.

(2) 可以由 (1) 直接推出.

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) &= -(\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \times \vec{\alpha} \\ &= -\left[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma} - (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})\vec{\beta}\right] \\ &= (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

二重叉积的性质

命题

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, 则

$$(1) (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha},$$

$$(2) \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}.$$

Proof.

(2) 可以由 (1) 直接推出.

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) &= -(\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \times \vec{\alpha} \\ &= -\left[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma} - (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})\vec{\beta}\right] \\ &= (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

下证 (1).



Proof.

若 $\vec{\alpha} = \vec{0}$, 则 (1) 式显然成立, 故设 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

Proof.

若 $\vec{\alpha} = \vec{0}$, 则 (1) 式显然成立, 故设 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. 两边同除以 $|\vec{\alpha}|$, 则变为

$$(\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0$$

Proof.

若 $\vec{\alpha} = \vec{0}$, 则 (1) 式显然成立, 故设 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. 两边同除以 $|\vec{\alpha}|$, 则变为

$$(\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0$$

故不妨设 $\vec{\alpha} = \mathbf{i}$, 即以 $\vec{\alpha}$ 所在轴建立直角坐标系, 且设 $\vec{\beta} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

Proof.

若 $\vec{\alpha} = \vec{0}$, 则 (1) 式显然成立, 故设 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. 两边同除以 $|\vec{\alpha}|$, 则变为

$$(\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0$$

故不妨设 $\vec{\alpha} = \mathbf{i}$, 即以 $\vec{\alpha}$ 所在轴建立直角坐标系, 且设 $\vec{\beta} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. 现在将 γ 沿 z -轴分解, 即 $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$, 其中 $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ 分别是 γ 在 z -轴和 xOy 平面上的投影向量.

Proof.

若 $\vec{\alpha} = \vec{0}$, 则 (1) 式显然成立, 故设 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. 两边同除以 $|\vec{\alpha}|$, 则变为

$$(\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0$$

故不妨设 $\vec{\alpha} = \mathbf{i}$, 即以 $\vec{\alpha}$ 所在轴建立直角坐标系, 且设 $\vec{\beta} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. 现在将 γ 沿 z -轴分解, 即 $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$, 其中 $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ 分别是 γ 在 z -轴和 xOy 平面上的投影向量. 从而 $\vec{\gamma}_1 \parallel \alpha \times \beta, \alpha_0 \perp \gamma_1, \beta \perp \gamma_1$

Proof.

若 $\vec{\alpha} = \vec{0}$, 则 (1) 式显然成立, 故设 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. 两边同除以 $|\vec{\alpha}|$, 则变为

$$(\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0$$

故不妨设 $\vec{\alpha} = \mathbf{i}$, 即以 $\vec{\alpha}$ 所在轴建立直角坐标系, 且设 $\vec{\beta} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. 现在将 γ 沿 z -轴分解, 即 $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$, 其中 $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ 分别是 γ 在 z -轴和 xOy 平面上的投影向量. 从而 $\vec{\gamma}_1 \parallel \alpha \times \beta, \alpha_0 \perp \gamma_1, \beta \perp \gamma_1$ 于是

$$LHS = (\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = (\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2) = (\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}_2$$

□

Proof.

而右边

$$\begin{aligned} RHS &= (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0 \\ &= (\vec{\alpha}_0 \cdot (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2))\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2))\vec{\alpha}_0 \\ &= (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\alpha}_0, \end{aligned}$$

Proof.

而右边

$$\begin{aligned} RHS &= (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0 \\ &= (\vec{\alpha}_0 \cdot (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2))\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2))\vec{\alpha}_0 \\ &= (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\alpha}_0, \end{aligned}$$

即等价于证明

$$(\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}_2 = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\alpha}_0,$$

Proof.

而右边

$$\begin{aligned} RHS &= (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}_0 \\ &= (\vec{\alpha}_0 \cdot (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2))\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2))\vec{\alpha}_0 \\ &= (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\alpha}_0, \end{aligned}$$

即等价于证明

$$(\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}_2 = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}_2)\vec{\alpha}_0,$$

若记 $\vec{\gamma}_2 = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, 并将 $\vec{\alpha}_0 = \mathbf{i}$, $\vec{\beta} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ 代入, 则

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}_2 &= (\mathbf{i} \times (a\mathbf{i} + b\mathbf{j})) \times (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) \\ &= b\mathbf{k} \times (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) \\ &= bc\mathbf{j} - bd\mathbf{i}. \end{aligned}$$



Proof.

而右边

$$\begin{aligned}& (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\gamma}_2) \vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}_2) \vec{\alpha}_0 \\&= (\mathbf{i} \cdot (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}))(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) - ((a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}))\mathbf{i} \\&= c(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) - (ac + bd)\mathbf{i} \\&= bc\mathbf{j} - bd\mathbf{i}.\end{aligned}$$

因此得证.



拉格朗日恒等式

命题

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3$, 则

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \times \vec{\delta} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} & \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \\ \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} & \vec{\beta} \cdot \vec{\delta} \end{vmatrix}$$

拉格朗日恒等式

命题

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3$, 则

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \times \vec{\delta} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} & \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \\ \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} & \vec{\beta} \cdot \vec{\delta} \end{vmatrix}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \times \vec{\delta} &= (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \\ &= (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) \times \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \\ &= [(\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})\vec{\delta} - (\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\gamma}] \cdot \vec{\beta} \\ &= (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\delta} \cdot \vec{\beta}) - (\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}) \end{aligned}$$

拉格朗日恒等式

命题

设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3$, 则

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \times \vec{\delta} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} & \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} \\ \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} & \vec{\beta} \cdot \vec{\delta} \end{vmatrix}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \times \vec{\delta} &= (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \\ &= (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) \times \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \\ &= [(\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})\vec{\delta} - (\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha})\vec{\gamma}] \cdot \vec{\beta} \\ &= (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\delta} \cdot \vec{\beta}) - (\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}) \end{aligned}$$

这里第四个等号利用了二重叉积的分解公式.



空间直线及其方程

空间直线的一般式方程

设平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不平行, 即等价地它们的法向量 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 不平行. 则它们必相交于一条直线 ℓ . 称

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

为直线 ℓ 的一般式方程.

空间直线的一般式方程

设平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不平行, 即等价地它们的法向量 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 不平行. 则它们必相交于一条直线 ℓ . 称

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

为直线 ℓ 的一般式方程.

注

从线性代数的角度, $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ 推出 $(*)$ 的系数矩阵的秩为2, 从而解空间是一维的, 即两平面相交为一条直线.

习题

使用向量的方法证明两个平面的交一定是一条直线.

曲面及其方程

球面

例

球心在 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

球面

例

球心在 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

解. 任取球面上一点 $M = (x, y, z)$, 则 $|M_0M| = R$. 由两点间欧氏距离的公式, 得

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

球面

例

球心在 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

解. 任取球面上一点 $M = (x, y, z)$, 则 $|M_0M| = R$. 由两点间欧氏距离的公式, 得

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

球面

例

球心在 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

解. 任取球面上一点 $M = (x, y, z)$, 则 $|M_0M| = R$. 由两点间欧氏距离的公式, 得

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

若球心在原点, 则球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

球面的一般方程

一般的, 对于三元二次方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

可以进行配方得到球面方程

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{F}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 + F^2 - 4G).$$

例

将 xOz 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

旋转椭球面

例

将 xOz 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

解. 绕 x 轴旋转所形成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

旋转椭球面

例

将 xOz 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

解. 绕 x 轴旋转所形成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

这两个曲面都叫作**旋转椭球面**, 特别地, 当 $a = c$ 时, 化作球面.



旋转单叶双曲面

例

将 xOz 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

旋转单叶双曲面

例

将 xOz 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

解. 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

旋转单叶双曲面

例

将 xOz 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

解. 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

称为旋转单叶双曲面.

旋转单叶双曲面

例

将 xOz 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

解. 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

称为**旋转单叶双曲面**.

绕 x 轴旋转所形成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

这个曲面叫作**旋转双叶双曲面**.



例

将 yOz 平面内的抛物线 $y^2 = 2pz$ 绕 z 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

例

将 yOz 平面内的抛物线 $y^2 = 2pz$ 绕 z 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面的方程.

解. 此曲面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

称为旋转抛物面. ■

圆锥面

定义

若直线 L 与另一条直线 ℓ 相交, 固定 ℓ , 将 L 绕 ℓ 旋转一周所得的旋转曲面称为圆锥面. 这两条直线的交点称为顶点. 两直线的夹角 $\angle(L, \ell)$ 称为该圆锥面的半顶角.

圆锥面

定义

若直线 L 与另一条直线 ℓ 相交, 固定 ℓ , 将 L 绕 ℓ 旋转一周所得的旋转曲面称为圆锥面. 这两条直线的交点称为顶点. 两直线的夹角 $\angle(L, \ell)$ 称为该圆锥面的半顶角.

例

将 yOz 平面中的直线 $z = y \cot \alpha$ 绕 z 轴旋转一周, 求所得到的圆锥面方程. 这里 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

圆锥面

定义

若直线 L 与另一条直线 ℓ 相交, 固定 ℓ , 将 L 绕 ℓ 旋转一周所得的旋转曲面称为圆锥面. 这两条直线的交点称为顶点. 两直线的夹角 $\angle(L, \ell)$ 称为该圆锥面的半顶角.

例

将 yOz 平面中的直线 $z = y \cot \alpha$ 绕 z 轴旋转一周, 求所得到的圆锥面方程. 这里 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

解. $z = y \cot \alpha$ 推出 $\frac{y}{z} = \tan \alpha$. 因此圆锥面的半顶角是 α . 圆锥面的方程为

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha.$$



定义

设直线 L 在沿某固定曲线 C 移动时始终平行于某固定直线, 所形成的曲面称为**柱面**. 定曲线 C 称为柱面的**准线**, 而动直线 L 称为柱面的**母线**.

空间曲线及其方程

空间曲线的一般式方程

这里的空间曲线指三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线.

这里的空间曲线指三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线.一般地, 空间曲线可以看作两个相交曲面的交线.

空间曲线的一般式方程

这里的空间曲线指三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线.一般地, 空间曲线可以看作两个相交曲面的交线.设

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{和} \quad G(x, y, z) = 0$$

是两个相交曲面的方程, 它们相交于曲线 C . 则

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

称为空间曲线 C 的一般式方程.

空间曲线 C 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

空间曲线 C 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

其中 $t \in I$, $x(t), y(t), z(t)$ 至少是 I 上的连续函数.

二次曲面

定义

曲面方程 $F(x, y, z) = 0$ 如果关于 x, y, z 是二次的, 则称所表示的曲面是**二次曲面**.

二次曲面方程经过坐标系的平移以及旋转变换后总可以化为标准方程.

定义

设 a, b, c 均为正数, 则方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面称为**椭球面**, 其中 a, b, c 称为椭球面的**半轴**.

定义

设 a, b, c 均为正数, 则方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面称为**单叶双曲面**.

定义

设 a, b, c 均为正数, 则方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所表示的曲面称为**单叶双曲面**. 而方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所表示的曲面称为**双叶双曲面**.

定义

设 a, b, c 均为正数, 则方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

所表示的曲面称为**椭圆锥面**, 简称**锥面**. 特别地, 当 $a = b$ 时, 方程表示圆锥面.

抛物面

定义

设 $pq > 0$, 则方程

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

所表示的曲面称为**椭圆抛物面**.

定义

设 $pq > 0$, 则方程

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

所表示的曲面称为**双曲抛物面**或**马鞍面**.

欢迎访问 atzjg.net