求和与求导、积分的可交换性

徐海峰整理

December 15, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

求和与求导、积分的可交换性

给定收敛的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, 我们关心的问题是**能否逐项求积分**以及**逐项求导**, 这也依赖于一致收敛性.

给定收敛的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, 我们关心的问题是**能否逐项求积分**以及**逐项求导**, 这也依赖于一致收敛性.

逐项积分

定理

(1) 设 $\{g_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 g 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理

(1) 设 $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 g 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 如果 f_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 f 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理

(1) 设 $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 g 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 如果 f_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 f 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

只要证明 (1)即可.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), S_n(x) \rightrightarrows f(x).$$

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$,$S_n(x) \rightrightarrows f(x)$.由于每个 f_k 是 Riemann 可积函数, 故 S_n 也是 Riemann 可积函数,

$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$,$S_n(x)\rightrightarrows f(x)$.由于每个 f_k 是 Riemann 可积函数, 故 S_n 也是 Riemann 可积函数,由 (1)知 f 也是 Riemann 可积的, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$,$S_n(x)\rightrightarrows f(x)$.由于每个 f_k 是 Riemann 可积函数, 故 S_n 也是 Riemann 可积函数,由 (1)知 f 也是 Riemann 可积的, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

Proof.

先证 g 的可积性.

Proof.

先证 g 的可积性.由于 $g_n \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n \geqslant N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Proof.

先证 g 的可积性.由于 $g_n \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n \geqslant N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

因为 g_N 是黎曼可积函数, 故存在 $[a, b]$ 的分割

$\pi:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g_N)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Proof.

先证 g 的可积性.由于 $g_n \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n \geqslant N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

因为 g_N 是黎曼可积函数, 故存在 $[a, b]$ 的分割

$\pi:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g_N)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于分割 π 的每一个小区间 $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$\begin{aligned}
|\omega_i(g_N) - \omega_i(g)| &= \left|\Big(\sup_{x\in I_i} g_N(x) - \inf_{x\in I_i} g_N(x)\Big) - \Big(\sup_{x\in I_i} g(x) - \inf_{x\in I_i} g(x)\Big)\right| \\
&\leqslant \left|\sup_{x\in I_i} g_N(x) - \sup_{x\in I_i} g(x)\right| + \left|\inf_{x\in I_i} g_N(x) - \inf_{x\in I_i} g(x)\right|
\end{aligned}$$

□

Proof.

故

$$\omega_i(g) \leqslant \omega_i(g_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

Proof.

故

$$\omega_i(g) \leqslant \omega_i(g_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

因此,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g_N)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Proof.

故

$$\omega_i(g) \leqslant \omega_i(g_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g_N)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

由黎曼可积函数的充要条件即知 g 是 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数. □

Proof.

现在, 当 $n \geqslant N$ 时, 我们有估计

$$\left|\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (g_n(x) - g(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |g_n(x) - g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

Proof.

现在, 当 $n \geqslant N$ 时, 我们有估计

$$\left|\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (g_n(x) - g(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |g_n(x) - g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

□

注: (i) 这个定理说的是极限或求和与积分运算次序的可交换性.

注: (i) 这个定理说的是极限或求和与积分运算次序的可交换性.

一般的, 定理中的一致收敛的条件是不能去掉的.

注: (i) 这个定理说的是极限或求和与积分运算次序的可交换性.

一般的, 定理中的一致收敛的条件是不能去掉的.但对于一致有界的函数列, 有如下的**控制收敛定理**:

定理

设 $g_n(x)$, $g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$. 如果存在常数 M, 使得

$$|g_n(x)| \leqslant M, \quad \forall\ x \in [a,b],\ n \geqslant 1.$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 从定理的证明还可以看出, (2) 中函数项级数还满足下面的一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

逐项求导

定理

设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 且

- *(1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收敛*;*

定理

设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 且

- *(1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收敛*;*
- *(2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$*;*

定理

设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且

- *(1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收敛;
- *(2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$;

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 其和函数可导, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x).$$

Proof.

由微积分基本公式,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

Proof.

由微积分基本公式,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

由条件 (2) 和上面的注记(ii),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Proof.

由微积分基本公式,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

由条件 (2) 和上面的注记(ii),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

再由条件 (1) 即知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Proof.

由微积分基本公式,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

由条件 (2) 和上面的注记(ii),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

再由条件 (1) 即知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 其和函数可导, 且导数为 $g(x)$.

$\square$

注: 条件 (1) 中点 a 可换成 $[a, b]$ 中任何一点, 并且连续可微的条件可以适当减弱, 见下面的定理.

注: 条件 (1) 中点 a 可换成 $[a, b]$ 中任何一点, 并且连续可微的条件可以适当减弱, 见下面的定理.

定理

设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a, b]$ 上一列可微函数, $c \in [a, b]$. 如果 $\{f_n(c)\}$ 收敛, $f_n'(x)$ 一致收敛到 $g(x)$, 则 $f_n(x)$ 一致收敛于可微函数 $f(x)$, 且 $f'(x) = g(x)$.

注: 条件 (1) 中点 a 可换成 $[a, b]$ 中任何一点, 并且连续可微的条件可以适当减弱, 见下面的定理.

定理

设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a, b]$ 上一列可微函数, $c \in [a, b]$. 如果 $\{f_n(c)\}$ 收敛, $f_n'(x)$ 一致收敛到 $g(x)$, 则 $f_n(x)$ 一致收敛于可微函数 $f(x)$, 且 $f'(x) = g(x)$.

Proof.

令 $h_{nm}(x) = f_n(x) - f_m(x)$, h_{mn} 是 $[a, b]$ 上的可微函数, 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, c)$ 或 (c, x), 使得

$$h_{nm}(x) - h_{nm}(c) = h_{nm}'(\xi)(x - c).$$

注: 条件 (1) 中点 a 可换成 $[a,b]$ 中任何一点, 并且连续可微的条件可以适当减弱, 见下面的定理.

定理

设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上一列可微函数, $c\in[a,b]$. 如果 $\{f_n(c)\}$ 收敛, $f_n'(x)$ 一致收敛到 $g(x)$, 则 $f_n(x)$ 一致收敛于可微函数 $f(x)$, 且 $f'(x)=g(x)$.

Proof.

令 $h_{nm}(x)=f_n(x)-f_m(x)$, h_{mn} 是 $[a,b]$ 上的可微函数, 由微分中值定理, 存在 $\xi\in(x,c)$ 或 (c,x), 使得

$$h_{nm}(x)-h_{nm}(c)=h_{nm}'(\xi)(x-c).$$

若令 $F_n(x)=f_n(x)-f_n(c)$, 则

$$|F_n(x)-F_m(x)|=|h_{nm}(x)-h_{nm}(c)|=|h_{nm}'(\xi)|\cdot|(x-c)|=|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|\cdot|x-c|$$

□

Proof.

由条件 $f_n' \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n, m > N$ 时, $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$.

Proof.

由条件 $f_n' \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n, m > N$ 时, $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$.因此

$$|F_n(x) - F_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - c| < (b - a)\varepsilon,$$

这说明 $\{F_n\}$ 即 $\{f_n - f_n(c)\}$ 一致收敛, 从而 $\{f_n\}$ 一致收敛到某个函数 f.

Proof.

由条件 $f_n' \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n, m > N$ 时, $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$.因此

$$|F_n(x) - F_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - c| < (b - a)\varepsilon,$$

这说明 $\{F_n\}$ 即 $\{f_n - f_n(c)\}$ 一致收敛, 从而 $\{f_n\}$ 一致收敛到某个函数 f.

下面说明 f 可导.

Proof.

由条件 $f_n' \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n, m > N$ 时, $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$.因此

$$|F_n(x) - F_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - c| < (b - a)\varepsilon,$$

这说明 $\{F_n\}$ 即 $\{f_n - f_n(c)\}$ 一致收敛, 从而 $\{f_n\}$ 一致收敛到某个函数 f.

下面说明 f 可导.为此, 任取 $x_0 \in [a, b]$, 令

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Proof.

由条件 $f_n' \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n, m > N$ 时, $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$.因此

$$|F_n(x) - F_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - c| < (b - a)\varepsilon,$$

这说明 $\{F_n\}$ 即 $\{f_n - f_n(c)\}$ 一致收敛, 从而 $\{f_n\}$ 一致收敛到某个函数 f.

下面说明 f 可导.为此, 任取 $x_0 \in [a, b]$, 令

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

由 f_n 可导知 g_n 为 $[a, b]$ 上的连续函数.

Proof.

由条件 $f_n' \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n, m > N$ 时, $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$.因此

$$|F_n(x) - F_m(x)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - c| < (b-a)\varepsilon,$$

这说明 $\{F_n\}$ 即 $\{f_n - f_n(c)\}$ 一致收敛, 从而 $\{f_n\}$ 一致收敛到某个函数 f.

下面说明 f 可导.为此, 任取 $x_0 \in [a, b]$, 令

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

由 f_n 可导知 g_n 为 $[a, b]$ 上的连续函数.类似于刚才的论证, 由微分中值定理, 当 $x \neq x_0$ 时, 存在 $\xi \in (x, x_0)$ 或 (x_0, x), 使得

$$|g_m(x) - g_n(x)| = \left| \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|,$$

Proof.

当 $x = x_0$ 时,

$$|g_m(x_0) - g_n(x_0)| = |f'_m(x_0) - f'_n(x_0)|.$$

Proof.

当 $x = x_0$ 时,

$$|g_m(x_0) - g_n(x_0)| = |f'_m(x_0) - f'_n(x_0)|.$$

由于 $f'_n \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, $|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$.

Proof.

当 $x = x_0$ 时,

$$|g_m(x_0) - g_n(x_0)| = |f'_m(x_0) - f'_n(x_0)|.$$

由于 $f'_n \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, $|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$.即有

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Proof.

当 $x = x_0$ 时,

$$|g_m(x_0) - g_n(x_0)| = |f_m'(x_0) - f_n'(x_0)|.$$

由于 $f_n' \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, $|f_m'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$.即有

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

这说明 $\{g_n\}$ 一致收敛, 其极限为

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ g(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

由前面关于一致收敛的定理知 $\tilde{g}$ 是连续函数.

Proof.

当 $x = x_0$ 时,

$$|g_m(x_0) - g_n(x_0)| = |f'_m(x_0) - f'_n(x_0)|.$$

由于 $f'_n \rightrightarrows g$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, $|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$.即有

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

这说明 $\{g_n\}$ 一致收敛, 其极限为

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ g(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

由前面关于一致收敛的定理知 $\tilde{g}$ 是连续函数.特别地, f 在 x_0 处可导且导数为 $g(x_0)$. □

推论

设 $\{f_n\}$ 为 $[a,b]$ 中一列可导函数, $c \in [a,b]$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛, 其和函数可导, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) f_n'(x).$$

推论

设 $\{f_n\}$ 为 $[a,b]$ 中一列可导函数, $c\in[a,b]$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛, 其和函数可导, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) f_n'(x).$$

Proof.

对级数的部分和应用上面的定理即可. □

应用

例

证明: $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(x+k\pi)^2}, \forall\ x \neq k\pi$. 该级数在任何不包含 $\{k\pi\}$ 的闭区间上都是一致收敛的. 该级数也可改写为

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+n\pi)^2} + \frac{1}{(x-n\pi)^2}\right], \quad x \neq k\pi.$$

例

证明: $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(x+k\pi)^2}$, $\forall\ x \neq k\pi$. 该级数在任何不包含 $\{k\pi\}$ 的闭区间上都是一致收敛的. 该级数也可改写为

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{(x+n\pi)^2} + \frac{1}{(x-n\pi)^2}\Big], \quad x \neq k\pi.$$

特别地, 令 $x \to 0$, 得

$$\frac{1}{3} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\Big) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2},$$

例

证明: $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(x+k\pi)^2}$, $\forall\, x \neq k\pi$. 该级数在任何不包含 $\{k\pi\}$ 的闭区间上都是一致收敛的. 该级数也可改写为

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+n\pi)^2} + \frac{1}{(x-n\pi)^2}\right], \quad x \neq k\pi.$$

特别地, 令 $x \to 0$, 得

$$\frac{1}{3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2},$$

由此推出

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$