



一般级数敛散性的判别方法

徐海峰整理

December 21, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

其他参考文献.

交错级数

定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为交错级数.

定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为交错级数.

例

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1},$$

定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为交错级数.

例

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1},$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为交错级数.

例

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1},$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

这两个级数是通过对 $\arctan x$ 和 $\ln(1+x)$ 作 Taylor 展开得到的.

定理 (Leibniz)

设 a_n 单调递减趋于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

定理 (Leibniz)

设 a_n 单调递减趋于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

Proof.

证明此定理有两种方法, 一种利用 Cauchy 准则, 一种利用这样一个事实: 数列 $\{S_n\}$ 收敛当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 和偶子列 $\{S_{2n}\}$ 都收敛且极限相等.

定理 (Leibniz)

设 a_n 单调递减趋于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

Proof.

证明此定理有两种方法, 一种利用 Cauchy 准则, 一种利用这样一个事实: 数列 $\{S_n\}$ 收敛当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 和偶子列 $\{S_{2n}\}$ 都收敛且极限相等.

这里利用 Cauchy 准则来证明.



$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $\{a_n\}$ 递减趋于零

Proof.

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $\{a_n\}$ 递减趋于零

Proof.

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

因此, 当 $p = 2k - 1$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k-1} \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) \\ &\leq a_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \{a_n\} \text{ 递减趋于零}$$

Proof.

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

因此, 当 $p = 2k - 1$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k-1} \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) \\ &\leq a_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-3} - a_{n+2k-2}) + a_{n+2k-1} \\ &> 0. \end{aligned}$$



Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\&\leq a_{n+1},\end{aligned}$$

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\&\leq a_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\&> 0.\end{aligned}$$

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\&\leq a_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\&> 0.\end{aligned}$$

这说明

$$|S_{n+p} - S_n| \leq a_{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (*)$$

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\&\leq a_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\&> 0.\end{aligned}$$

这说明

$$|S_{n+p} - S_n| \leq a_{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (*)$$

因此原级数收敛.

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\&\leq a_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\&> 0.\end{aligned}$$

这说明

$$|S_{n+p} - S_n| \leq a_{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (*)$$

因此原级数收敛. 在 (*) 中令 $p \rightarrow \infty$, 则得 $|r_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}$, 其中

$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 为级数的和, 这是交错级数的误差估计.

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\&\leq a_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\&> 0.\end{aligned}$$

这说明

$$|S_{n+p} - S_n| \leq a_{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (*)$$

因此原级数收敛. 在 (*) 中令 $p \rightarrow \infty$, 则得 $|r_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}$, 其中

$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 为级数的和, 这是交错级数的误差估计. 从上面这些不等式, 我们

还看到 $|S_{n+p} - S_n| > a_{n+1} - a_{n+2}$, 令 $p \rightarrow \infty$, 得 $|r_n| \geq a_{n+1} - a_{n+2}$. $\square$

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的前 n 项和.

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的前 n 项和. 易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的前 n 项和. 易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

由条件 $\{a_n\}$ 单调递减,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &\geq (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) = S_{2n-2} \end{aligned}$$

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的前 n 项和. 易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

由条件 $\{a_n\}$ 单调递减,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &\geq (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) = S_{2n-2} \end{aligned}$$

即 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增数列.

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的前 n 项和. 易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

由条件 $\{a_n\}$ 单调递减,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &\geq (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) = S_{2n-2} \end{aligned}$$

即 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增数列. 又

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &\leq a_1, \end{aligned}$$

Proof.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S , 且有 $S \leq a_1$.

Proof.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S , 且有 $S \leq a_1$.

另一方面,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

Proof.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S , 且有 $S \leq a_1$.

另一方面,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

由条件 $a_{2n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S.$$

Proof.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S , 且有 $S \leq a_1$.

另一方面,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

由条件 $a_{2n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S.$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.



Proof.

由于

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots),$$

Proof.

由于

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots),$$

故

$$|r_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots,$$

Proof.

由于

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots),$$

故

$$|r_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots,$$

这是一个交错级数, 故收敛, 且其和不超过首项, 即 $|r_n| \leq a_{n+1}$.



例

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

Proof.

因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减趋于零, 由 Leibniz 判别法知级数收敛.



一般级数

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

此时, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \rightarrow 0,$$

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

此时, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \rightarrow 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

此时, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \rightarrow 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 即绝对收敛的级数必定收敛.

定义 (条件收敛)

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$),

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

这里 $|x| > 1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

这里 $|x| > 1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 此时设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = |x| = 1 + \alpha$, 其中 $\alpha > 0$.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

这里 $|x| > 1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 此时设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = |x| = 1 + \alpha$, 其中 $\alpha > 0$. 任给 $0 < \varepsilon < \alpha$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|x| - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < |x| + \varepsilon.$$

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

这里 $|x| > 1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 此时设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = |x| = 1 + \alpha$, 其中 $\alpha > 0$. 任给 $0 < \varepsilon < \alpha$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|x| - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < |x| + \varepsilon.$$

这里 $|x| - \varepsilon > |x| - \alpha = 1$.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ ($n \rightarrow \infty$), 故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

这里 $|x| > 1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 此时设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = |x| = 1 + \alpha$, 其中 $\alpha > 0$. 任给 $0 < \varepsilon < \alpha$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|x| - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < |x| + \varepsilon.$$

这里 $|x| - \varepsilon > |x| - \alpha = 1$. 于是当 $n > N$ 时, $a_n > 1$. 故 $(-1)^{n-1} a_n \not\rightarrow 0$, 原级数发散.

定义

每一项是函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 称为函数项级数. 若 x_0 代入后, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是该函数项级数的**收敛点**; 若代入后发散, 则称为**发散点**. 所有收敛点的集合称为该函数项级数的**收敛域**.

定义

每一项是函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 称为函数项级数. 若 x_0 代入后, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是该函数项级数的**收敛点**; 若代入后发散, 则称为**发散点**. 所有收敛点的集合称为该函数项级数的**收敛域**.

因此, 上面函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $(-1, 1]$.

重要引理

引理 (分部求和)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1} - a_k) = a_n b_n - a_m b_m .$$

引理 (分部求和)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1} - a_k) = a_n b_n - a_m b_m .$$

Proof.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1} - a_k) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} [a_{k+1}b_{k+1} - a_{k+1}b_k + b_k a_{k+1} - b_k a_k] \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} [a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k] = a_n b_n - a_m b_m . \end{aligned}$$

分部求和可导出

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

分部求和可导出

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

推论

设 a_i, b_i ($i \geq 1$) 为两组实数, 则有

$$\sum_{i=m+1}^n a_i b_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m, \quad \forall m \geq 0.$$

这里 $B_0 = 0, B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ ($k \geq 1$).

推论

设 a_i, b_i ($i \geq 1$) 为两组实数, 则有

$$\sum_{i=m+1}^n a_i b_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m, \quad \forall m \geq 0.$$

这里 $B_0 = 0, B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ ($k \geq 1$).

Proof.

由分部求和公式,

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} (B_{k+1} - B_k) + \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) = a_n B_n - a_m B_m.$$



Proof.

即

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_m B_m .$$

Proof.

即

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_m B_m .$$

等号左边记 $i = k + 1$, 上式改写为

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^n a_i b_i &= \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + (a_m - a_{m+1}) B_m + a_n B_n - a_m B_m \\ &= \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m . \end{aligned}$$



也可直接计算如下:

也可直接计算如下:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^n a_i b_i &= \sum_{i=m+1}^n a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=m+1}^n a_i B_i - \sum_{i=m+1}^n a_i B_{i-1} \\&= \sum_{i=m+1}^n a_i B_i - \sum_{i=m}^{n-1} a_{i+1} B_i \\&= \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m .\end{aligned}$$

推论 (Abel 引理)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为单调数列, 且 $|B_i| \leq M$ ($i \geq 1$), 则

$$\left| \sum_{i=m+1}^n a_i b_i \right| \leq 2M(|a_n| + |a_{m+1}|), \quad \forall m \geq 0.$$

推论 (Abel 引理)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为单调数列, 且 $|B_i| \leq M$ ($i \geq 1$), 则

$$\left| \sum_{i=m+1}^n a_i b_i \right| \leq 2M(|a_n| + |a_{m+1}|), \quad \forall m \geq 0.$$

Proof.

根据 Abel 变换,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m+1}^n a_i b_i \right| &= \left| \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m \right| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| |B_i| + |a_n| |B_n| + |a_{m+1}| |B_m| \\ &\leq M \sum_{i=m+1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} &= M \left| \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \right| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &= M|a_{m+1} - a_n| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &\leq 2M(|a_n| + |a_{m+1}|). \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} &= M \left| \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \right| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &= M|a_{m+1} - a_n| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &\leq 2M(|a_n| + |a_{m+1}|). \end{aligned}$$

这里第一个等号处我们用到了 $\{a_i\}$ 的单调性.



Dirichlet判別法

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

由假设, 存在 $M > 0$, 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

由假设, 存在 $M > 0$, 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \leq 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) \leq 4M|a_{n+1}| \rightarrow 0.$$

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

由假设, 存在 $M > 0$, 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \leq 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) \leq 4M|a_{n+1}| \rightarrow 0.$$

由 Cauchy 准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

□

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在.

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在. 于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0.

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在. 于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛推出 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界,

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在. 于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛推出 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 故由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$ 收敛.

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在. 于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛推出 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 故由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$ 收敛. 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n$$

也收敛.



例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$. a_n 单调递减趋于 0.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$. a_n 单调递减趋于 0. 下证 b_n 的部分和有界.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$. a_n 单调递减趋于 0. 下证 b_n 的部分和有界.

利用公式

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x,$$

得

$$\sum_{k=1}^n b_k = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ \frac{\cos x - \cos(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$. a_n 单调递减趋于 0. 下证 b_n 的部分和有界.

利用公式

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x,$$

得

$$\sum_{k=1}^n b_k = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ \frac{\cos x - \cos(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

即 b_n 的部分和总是有界的. 故由 Dirichlet 判别法知, 原级数收敛.

□

Exercise

判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}.$$

欢迎访问 atzjg.net