定积分

徐海峰整理

December 3, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

定积分的概念

定义 (区间的划分)

设 $I = [a, b]$, 若点列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 满足

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则称该点列是区间 I 的**一个划分**.

定义 (区间的划分)

设 $I = [a, b]$, 若点列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 满足

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则称该点列是区间 I 的**一个划分**.

为方便叙述, 记上面的划分为

$$\pi : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- 这里将 $I = [a, b]$ 分成了 n 个小区间, 第 i 个小的闭区间为 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 其长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

定义 (区间的划分)

设 $I=[a,b]$, 若点列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 满足

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

则称该点列是区间 I 的一个**划分**.

为方便叙述, 记上面的划分为

$$\pi: \quad a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

- 这里将 $I=[a,b]$ 分成了 n 个小区间, 第 i 个小的闭区间为 $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$. 其长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.
- 记 $\|\pi\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$, 即 $\|\pi\|$ 是这些小区间长度的最大值, 称为分割 π 的**模**.

定义 (区间的划分)

设 $I = [a, b]$, 若点列 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 满足

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则称该点列是区间 I 的**一个划分**.

为方便叙述, 记上面的划分为

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- 这里将 $I = [a, b]$ 分成了 n 个小区间, 第 i 个小的闭区间为 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 其长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- 记 $\|\pi\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta x_i\}$, 即 $\|\pi\|$ 是这些小区间长度的最大值, 称为分割 π 的**模**.
- 若 Δx_i 都相同, 则称此划分为 $[a, b]$ 的 n 等分. 若记 $\Delta x = \Delta x_i$, 则每个小区间的长度为 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

定义

设 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一个函数, 若存在常数 $I \in \mathbb{R}$, 任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 对 I 的任意分割 π : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, 只要 $\|\pi\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon, \quad \forall\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

则称函数 f 在 $[a, b]$ 上**黎曼可积**或**可积**.

定义

设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数, 若存在常数 $I \in \mathbb{R}$, 任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 对 I 的任意分割 π： $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, 只要 $\|\pi\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon, \quad \forall\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

则称函数 f 在 $[a,b]$ 上**黎曼可积**或**可积**.称 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数 f 关于划分 π 及诸点 $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ 的**黎曼和**或**积分和**.

定义

设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数, 若存在常数 $I \in \mathbb{R}$, 任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 对 I 的任意分割 π: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, 只要 $\|\pi\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon, \quad \forall\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

则称函数 f 在 $[a,b]$ 上**黎曼可积**或**可积**.称 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数 f 关于划分 π 及诸点 $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ 的**黎曼和**或**积分和**.并记

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

定义

设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数, 若存在常数 $I\in\mathbb{R}$, 任给 $\varepsilon>0$, 均存在 $\delta>0$, 对 I 的任意分割 π: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, 只要 $\|\pi\|<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon, \quad \forall\, \xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\ldots,n.$$

则称函数 f 在 $[a,b]$ 上**黎曼可积**或**可积**.称 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数 f 关于划分 π 及诸点 $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ 的**黎曼和**或**积分和**.并记

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

称 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 f 在区间 I 上的**黎曼积分**或**定积分**, 也记为 $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x$. 其中 $f(x)$ 称为**被积函数**, $[a,b]$ 称为**积分区间**, a,b 分别称为**积分下限**和**积分上限**.

注

(1) 积分与变量 x 的选择无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

注

(1) 积分与变量 x 的选择无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 如果 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是惟一确定的.

注

(1) 积分与变量 x 的选择无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 如果 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是惟一确定的.

(3) 连续函数总是可积的.

注

(1) 积分与变量 x 的选择无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是惟一确定的.

(3) 连续函数总是可积的.

(4) （可积的必要条件）若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界, 反之不然.

注

(1) 积分与变量 x 的选择无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 如果 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是惟一确定的.

(3) 连续函数总是可积的.

(4) （可积的必要条件）若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界, 反之不然.

(5) 有界函数未必可积, 例如 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

可积的必要条件

可积的必要条件

定理

若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界, 反之不然.

可积的必要条件

定理

若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界, 反之不然.

Proof.

假设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 记 I 为其积分.

可积的必要条件

定理

若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界, 反之不然.

Proof.

假设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 记 I 为其积分.取 $\varepsilon=1$, 由定义, 存在 $\delta>0$, 对 $[a,b]$ 的任意分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

当 $\|\pi\|<\delta$ 时, 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<1.$$

可积的必要条件

定理

若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界, 反之不然.

Proof.

假设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 记 I 为其积分.取 $\varepsilon=1$, 由定义, 存在 $\delta>0$, 对 $[a,b]$ 的任意分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

当 $\|\pi\|<\delta$ 时, 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1.$$

特别地, 取自然数 $n>\frac{b-a}{\delta}$,

可积的必要条件

定理

若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界, 反之不然.

Proof.

假设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 记 I 为其积分.取 $\varepsilon=1$, 由定义, 存在 $\delta>0$, 对 $[a,b]$ 的任意分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

当 $\|\pi\|<\delta$ 时, 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1.$$

特别地, 取自然数 $n>\frac{b-a}{\delta}$,对区间 $[a,b]$ 作 n 等分, □

Proof.

即

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Proof.

即

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

此时 $\|\pi\| = \frac{b-a}{n} < \delta$.

Proof.

即

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

此时 $\|\pi\| = \frac{b-a}{n} < \delta$.我们有

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - I\right| < 1, \quad \forall\ \xi_i \in \left[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)\right],$$

Proof.

即

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

此时 $\|\pi\| = \frac{b-a}{n} < \delta$.我们有

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - I\right| < 1, \quad \forall\, \xi_i \in \left[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)\right],$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{n}{b-a}(1 + |I|).$$

Proof.

即

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

此时 $\|\pi\| = \frac{b-a}{n} < \delta$.我们有

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - I \right| < 1, \quad \forall\, \xi_i \in \left[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a) \right],$$

从而

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \right| \leqslant \frac{n}{b-a}(1 + |I|).$$

对于固定的 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 当 $i \neq j$ 时, 我们取 $\xi_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, 令

$$M = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \left\{ f\left(a + \frac{i}{n}(b-a) \right) \right\}.$$

□

Proof.

由于

$$\left|f(\xi_j) + \sum_{i\neq j} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{n}{b-a}(1+|I|),$$

Proof.

由于

$$\left|f(\xi_j)+\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\right|\leqslant\frac{n}{b-a}(1+|I|),$$

利用不等式 $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$,

Proof.

由于

$$\left|f(\xi_j)+\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\right|\leqslant\frac{n}{b-a}(1+|I|),$$

利用不等式 $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$,得如下估计:

$$\begin{aligned}|f(\xi_j)|&\leqslant\left|\sum_{i\neq j}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|+\frac{n}{b-a}(1+|I|)\\&\leqslant(n-1)M+\frac{n}{b-a}(1+|I|),\end{aligned}$$

Proof.

由于

$$\left|f(\xi_j)+\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\right|\leqslant\frac{n}{b-a}(1+|I|),$$

利用不等式 $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$,得如下估计:

$$\begin{aligned}|f(\xi_j)|&\leqslant\left|\sum_{i\neq j}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|+\frac{n}{b-a}(1+|I|)\\&\leqslant(n-1)M+\frac{n}{b-a}(1+|I|),\end{aligned}$$

这对任意 $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]=\left[a+\frac{j-1}{n}(b-a),a+\frac{j}{n}(b-a)\right]$ 均成立,

Proof.

由于

$$\left|f(\xi_j)+\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\right|\leqslant\frac{n}{b-a}(1+|I|),$$

利用不等式 $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$,得如下估计:

$$\begin{aligned}|f(\xi_j)|&\leqslant\left|\sum_{i\neq j}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|+\frac{n}{b-a}(1+|I|)\\&\leqslant(n-1)M+\frac{n}{b-a}(1+|I|),\end{aligned}$$

这对任意 $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]=\left[a+\frac{j-1}{n}(b-a),a+\frac{j}{n}(b-a)\right]$ 均成立,因此有

$$|f(x)|\leqslant(n-1)M+\frac{n}{b-a}(1+|I|),\quad\forall\ x\in[a,b],$$

这说明 f 有界. $\square$

有界函数未必可积

考虑 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

有界函数未必可积

考虑 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

任给 $[0,1]$（或其他某个长度为 1 的闭区间）的一个分割，当 ξ_i 取 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的无理数时，积分和为 0;

有界函数未必可积

考虑 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

任给 $[0,1]$（或其他某个长度为 1 的闭区间）的一个分割，当 ξ_i 取 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的无理数时，积分和为 0;当 ξ_i 取 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的有理数时，积分和为 1.

有界函数未必可积

考虑 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$$

任给 $[0,1]$（或其他某个长度为 1 的闭区间）的一个分割，当 ξ_i 取 $[x_{i-1},x_i]$ 中的无理数时，积分和为 0;当 ξ_i 取 $[x_{i-1},x_i]$ 中的有理数时，积分和为 1.因此 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上的积分和没有极限.

连续函数的积分

设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 考虑由 f 的图像、直线 $x = a$, $x = b$ 以及 $y = 0$(x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形.

连续函数的积分

设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 考虑由 f 的图像、直线 $x = a$, $x = b$ 以及 $y = 0$(x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形.前面定积分的几何意义实际上就是该曲边梯形的面积.

连续函数的积分

设 f 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 考虑由 f 的图像、直线 $x = a$, $x = b$ 以及 $y = 0$(x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形.前面定积分的几何意义实际上就是该曲边梯形的面积.

(1) 设 $f(x) \equiv c$ 为常值函数, 则无论对 $[a, b]$ 作什么分割, 以及 ξ_i 如何选取, 积分和总是取固定的值,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a),$$

设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 考虑由 f 的图像、直线 $x=a$, $x=b$ 以及 $y=0$(x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形.前面定积分的几何意义实际上就是该曲边梯形的面积.

(1) 设 $f(x)\equiv c$ 为常值函数, 则无论对 $[a,b]$ 作什么分割, 以及 ξ_i 如何选取, 积分和总是取固定的值,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i=c(b-a),$$

因此,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=c(b-a).$$

连续函数的积分

设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 考虑由 f 的图像、直线 $x=a$, $x=b$ 以及 $y=0$(x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形.前面定积分的几何意义实际上就是该曲边梯形的面积.

(1) 设 $f(x)\equiv c$ 为常值函数, 则无论对 $[a,b]$ 作什么分割, 以及 ξ_i 如何选取, 积分和总是取固定的值,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i=c(b-a),$$

因此,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=c(b-a).$$

这实际上是矩形的面积公式.

设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，考虑由 f 的图像、直线 $x=a$, $x=b$ 以及 $y=0$(x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形.前面定积分的几何意义实际上就是该曲边梯形的面积.

(1) 设 $f(x)\equiv c$ 为常值函数，则无论对 $[a,b]$ 作什么分割，以及 ξ_i 如何选取，积分和总是取固定的值,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i=c(b-a),$$

因此,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=c(b-a).$$

这实际上是矩形的面积公式.常值函数在任意闭区间 $[a,b]$ 上可积.

连续函数的积分

设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 考虑由 f 的图像、直线 $x=a$, $x=b$ 以及 $y=0$(x 轴) 在平面上所围成的曲边梯形.前面定积分的几何意义实际上就是该曲边梯形的面积.

(1) 设 $f(x)\equiv c$ 为常值函数, 则无论对 $[a,b]$ 作什么分割, 以及 ξ_i 如何选取, 积分和总是取固定的值,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a),$$

因此,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b-a).$$

这实际上是矩形的面积公式.常值函数在任意闭区间 $[a,b]$ 上可积.换句话说, 定义 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为以 $x=a$, $x=b$, $y=f(x)=c$ 以及 x-轴所围成图形的面积是合理的.

线性函数的积分

(2) 设 $f(x) = \ell(x)$ 为 $[a, b]$ 上的线性函数, 过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$.

(2) 设 $f(x) = \ell(x)$ 为 $[a, b]$ 上的线性函数, 过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$.方程为

$$\ell(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

线性函数的积分

(2) 设 $f(x) = \ell(x)$ 为 $[a, b]$ 上的线性函数, 过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$.方程为

$$\ell(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

于是

$$f(\xi_i) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\xi_i - a).$$

线性函数的积分

(2) 设 $f(x)=\ell(x)$ 为 $[a,b]$ 上的线性函数, 过点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$.方程为

$$\ell(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

于是

$$f(\xi_i)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\xi_i-a).$$

积分和为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\xi_i-a)\right]\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}f(a)\Delta x_i+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)\Delta x_i\end{aligned}$$

续

为简洁, 记 $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 则上式变为

$$= f(a)(b-a) + k\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i - ka(b-a)$$

续

为简洁, 记 $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 则上式变为

$$= f(a)(b-a) + k\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i - ka(b-a)$$

可见, $\ell(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 $y=x$ 在 $[a,b]$ 上可积.

续

为简洁, 记 $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 则上式变为

$$= f(a)(b-a) + k\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i - ka(b-a)$$

可见, $\ell(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 $y=x$ 在 $[a,b]$ 上可积.

为证明 $y=x$ 在 $[a,b]$ 上可积, 从刚才矩形的面积提示我们, 要找的 I 为梯形的面积, 即

$$I = \frac{1}{2}(b-a)(a+b).$$

续

为简洁, 记 $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 则上式变为

$$= f(a)(b-a) + k\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i - ka(b-a)$$

可见, $\ell(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积当且仅当 $y = x$ 在 $[a, b]$ 上可积.

为证明 $y = x$ 在 $[a, b]$ 上可积, 从刚才矩形的面积提示我们, 要找的 I 为梯形的面积, 即

$$I = \frac{1}{2}(b-a)(a+b).$$

对于此 I, 证明: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $[a, b]$ 的任意分割 π, 只要 $\|\pi\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i - I\right| < \varepsilon, \quad \forall\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

续

下面估计

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i.$$

续

下面估计

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i.$$

注意到 $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, 故

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i$$

续

而

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2$$

续

而

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2$$

回顾不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2$$

回顾不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

现在 $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = b - a$ 为固定值, 则

$$\frac{(b-a)^2}{n} \leqslant (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2 \leqslant \|\pi\|(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = \|\pi\|(b-a)$$

续

而

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2$$

回顾不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

现在 $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = b - a$ 为固定值, 则

$$\frac{(b-a)^2}{n} \leqslant (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2 \leqslant \|\pi\|(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = \|\pi\|(b-a)$$

当 $\|\pi\| \to 0$ 时, $n \to \infty$, 推出 $\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 \to 0$.

续

而

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2$$

回顾不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

现在 $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = b - a$ 为固定值, 则

$$\frac{(b-a)^2}{n} \leqslant (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2 \leqslant \|\pi\|(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = \|\pi\|(b-a)$$

当 $\|\pi\| \to 0$ 时, $n \to \infty$, 推出 $\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 \to 0$.这实际上已经推出 $y = x$ 在 $[a, b]$ 上可积. (见后面Riemann可积的充要条件.)

因此, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\right| \to 0.$$

因此, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\right| \to 0.$$

而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{m} \left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right) \frac{b-a}{m}\right| \to 0$$

因此, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\right| \to 0.$$

而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{m}\right| \to 0$$

后者是将 $[a, b]$ 进行 m 等分后的积分和, 其极限显然为 $I = \frac{1}{2}(b-a)(a+b)$.

因此, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\right| \to 0.$$

而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{m}\right| \to 0$$

后者是将 $[a, b]$ 进行 m 等分后的积分和, 其极限显然为 $I = \frac{1}{2}(b-a)(a+b)$.事实上, 设 $t = \min\{\Delta x_i\}$, 将 $[a, b]$ 进行 m 等分, 使得 $\frac{b-a}{m} \leqslant t$. 使得 x_i 落在加细后的小区间中.

因此, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\right| \to 0.$$

而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{m} \left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right) \frac{b-a}{m}\right| \to 0$$

后者是将 $[a, b]$ 进行 m 等分后的积分和, 其极限显然为 $I = \frac{1}{2}(b-a)(a+b)$.事实上, 设 $t = \min\{\Delta x_i\}$, 将 $[a, b]$ 进行 m 等分, 使得 $\frac{b-a}{m} \leqslant t$. 使得 x_i 落在加细后的小区间中.加细后的分割记为 π', 它包含原来的点列 x_i 以及 m 等分点.

因此, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\right| \to 0.$$

而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{m} \left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right) \frac{b-a}{m}\right| \to 0$$

后者是将 $[a,b]$ 进行 m 等分后的积分和, 其极限显然为 $I = \frac{1}{2}(b-a)(a+b)$.事实上, 设 $t = \min\{\Delta x_i\}$, 将 $[a,b]$ 进行 m 等分, 使得 $\frac{b-a}{m} \leqslant t$. 使得 x_i 落在加细后的小区间中.加细后的分割记为 π', 它包含原来的点列 x_i 以及 m 等分点. 如果记

$$\pi': \ a = x_0' < x_1' < \cdots < x_p' \leqslant b$$

因此, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\right| \to 0.$$

而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{m}\right| \to 0$$

后者是将 $[a, b]$ 进行 m 等分后的积分和, 其极限显然为 $I = \frac{1}{2}(b-a)(a+b)$.事实上, 设 $t = \min\{\Delta x_i\}$, 将 $[a, b]$ 进行 m 等分, 使得 $\frac{b-a}{m} \leqslant t$. 使得 x_i 落在加细后的小区间中.加细后的分割记为 π', 它包含原来的点列 x_i 以及 m 等分点. 如果记

$$\pi' : \ a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_p \leqslant b$$

则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{p} x'_j \Delta x'_j\right| < \varepsilon,$$

且

$$\left|\sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j' - \sum_{j=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{m}\right| < \varepsilon,$$

于是上面可放缩为

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j'\right| + \left|\sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j' - \sum_{i=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}\right| < 2\varepsilon$$

续

且

$$\left|\sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j' - \sum_{j=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{m}\right| < \varepsilon,$$

于是上面可放缩为

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j'\right| + \left|\sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j' - \sum_{i=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}\right| < 2\varepsilon$$

因此, $y = x$ 在 $[a, b]$ 上可积, 一般的线性函数 $\ell(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

续

且

$$\left|\sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j' - \sum_{j=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{m}\right| < \varepsilon,$$

于是上面可放缩为

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j'\right| + \left|\sum_{j=1}^{p} x_j' \Delta x_j' - \sum_{i=1}^{m}\left(a + \frac{i}{m}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}\right| < 2\varepsilon$$

因此, $y = x$ 在 $[a, b]$ 上可积, 一般的线性函数 $\ell(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.故对线性函数 $\ell(x)$, 定义其在 $[a, b]$ 上的积分为以 $x = a$, $x = b$, $y = \ell(x)$ 以及 x 轴所围图形(梯形)的面积是合理的.

Darboux 和

上面的思想可以引出**达布(Darboux)和**的概念, 并建立可积的充要条件.

上面的思想可以引出**达布(Darboux)和**的概念, 并建立可积的充要条件.

定义

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数.

Darboux 和

上面的思想可以引出**达布(Darboux)和**的概念, 并建立可积的充要条件.

定义

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数.对于 $[a, b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

Darboux 和

上面的思想可以引出**达布(Darboux)和**的概念, 并建立可积的充要条件.

定义

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.对于 $[a,b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

Darboux 和

上面的思想可以引出**达布(Darboux)和**的概念, 并建立可积的充要条件.

定义

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数.对于 $[a, b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

令

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

Darboux 和

上面的思想可以引出**达布(Darboux)和**的概念, 并建立可积的充要条件.

定义

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.对于 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),$$

令

$$S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

我们称 S 为 f 关于 π 的**Darboux 上和**, 简称**上和**, 也记为 $S(\pi)$ 或 $S(\pi,f)$;

Darboux 和

上面的思想可以引出**达布(Darboux)和**的概念, 并建立可积的充要条件.

定义

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.对于 $[a,b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

令

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

我们称 S 为 f 关于 π 的**Darboux 上和**, 简称**上和**, 也记为 $S(\pi)$ 或 $S(\pi, f)$;而称 s 为 f 关于 π 的**Darboux 下和**, 简称**下和**, 也记为 $s(\pi)$ 或 $s(\pi, f)$.

振幅

显然, 任何 Riemann 和总是介于下和与上和之间.

振幅

显然, 任何 Riemann 和总是介于下和与上和之间.称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**.

振幅

显然, 任何 Riemann 和总是介于下和与上和之间.称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**.

由定义, 上和与下和之差可以表示为

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

振幅

显然, 任何 Riemann 和总是介于下和与上和之间.称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**.

由定义, 上和与下和之差可以表示为

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Riemann 对于积分的贡献之一就是证明了 f 可积当且仅当 $S - s$ 的极限为零(当分割的模趋于零时).

振幅

显然, 任何 Riemann 和总是介于下和与上和之间.称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**.

由定义, 上和与下和之差可以表示为

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Riemann 对于积分的贡献之一就是证明了 f 可积当且仅当 $S - s$ 的极限为零(当分割的模趋于零时).

Darboux 进一步研究了任意有界函数的上和与下和的极限.

上和与下和关于分割的单调性

引理

设分割 π' 是从 π 添加 k 个分点得到的, 则有

$$S(\pi) \geqslant S(\pi') \geqslant S(\pi) - (M-m)k\|\pi\|,$$

$$s(\pi) \leqslant s(\pi') \leqslant s(\pi) + (M-m)k\|\pi\|.$$

引理

设分割 π' 是从 π 添加 k 个分点得到的, 则有

$$S(\pi) \geqslant S(\pi') \geqslant S(\pi) - (M-m)k\|\pi\|,$$
$$s(\pi) \leqslant s(\pi') \leqslant s(\pi) + (M-m)k\|\pi\|.$$

Proof.

为简单起见, 我们证明 $k=1$ 的情形. $k>1$ 的结论可以利用 $k=1$ 的结论推出.

上和与下和关于分割的单调性

引理

设分割 π' 是从 π 添加 k 个分点得到的, 则有

$$S(\pi) \geqslant S(\pi') \geqslant S(\pi) - (M-m)k\|\pi\|,$$
$$s(\pi) \leqslant s(\pi') \leqslant s(\pi) + (M-m)k\|\pi\|.$$

Proof.

为简单起见, 我们证明 $k=1$ 的情形. $k>1$ 的结论可以利用 $k=1$ 的结论推出.

此时, 设新添加的分点为 $\bar{x}$, 则 $\bar{x}$ 必落在某个区间 (x_{j-1}, x_j) 内.

上和与下和关于分割的单调性

引理

设分割 π' 是从 π 添加 k 个分点得到的, 则有

$$S(\pi) \geqslant S(\pi') \geqslant S(\pi) - (M-m)k\|\pi\|,$$
$$s(\pi) \leqslant s(\pi') \leqslant s(\pi) + (M-m)k\|\pi\|.$$

Proof.

为简单起见, 我们证明 $k=1$ 的情形. $k>1$ 的结论可以利用 $k=1$ 的结论推出.

此时, 设新添加的分点为 $\bar{x}$, 则 $\bar{x}$ 必落在某个区间 (x_{j-1}, x_j) 内.由上和的定义,

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = M_j \Delta x_j + \sum_{i \neq j} M_i \Delta x_i,$$

□

续

Proof.

$$S(\pi') = M_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} M_i \Delta x_i,$$

Proof.

$$S(\pi') = M_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} M_i \Delta x_i,$$

这里 M_j' 及 M_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_j]$ 上的上确界.

续

Proof.

$$S(\pi') = M_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} M_i \Delta x_i,$$

这里 M_j' 及 M_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_j]$ 上的上确界.因为 $M_j' \leqslant M_j$, $M_j'' \leqslant M_j$,

Proof.

$$S(\pi') = M_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} M_i \Delta x_i,$$

这里 M_j' 及 M_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_j]$ 上的上确界.因为 $M_j' \leqslant M_j$, $M_j'' \leqslant M_j$,从而有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant S(\pi) - S(\pi') = (M_j - M_j')(\bar{x} - x_{j-1}) + (M_j - M_j'')(x_j - \bar{x}) \\ &\leqslant (M - m)(\bar{x} - x_{j-1}) + (M - m)(x_j - \bar{x}) \\ &= (M - m)\Delta x_j \leqslant (M - m)\|\pi\|. \end{aligned}$$

续

Proof.

$$S(\pi') = M_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} M_i \Delta x_i,$$

这里 M_j' 及 M_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_j]$ 上的上确界.因为 $M_j' \leqslant M_j$, $M_j'' \leqslant M_j$,从而有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S(\pi) - S(\pi') &= (M_j - M_j')(\bar{x} - x_{j-1}) + (M_j - M_j'')(x_j - \bar{x}) \\ &\leqslant (M - m)(\bar{x} - x_{j-1}) + (M - m)(x_j - \bar{x}) \\ &= (M - m)\Delta x_j \leqslant (M - m)\|\pi\|. \end{aligned}$$

即 $S(\pi) \geqslant S(\pi') \geqslant S(\pi) - (M - m)\|\pi\|$.

续

Proof.

$$S(\pi') = M_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + M_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} M_i \Delta x_i,$$

这里 M_j' 及 M_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_j]$ 上的上确界.因为 $M_j' \leqslant M_j$, $M_j'' \leqslant M_j$,从而有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S(\pi) - S(\pi') &= (M_j - M_j')(\bar{x} - x_{j-1}) + (M_j - M_j'')(x_j - \bar{x}) \\ &\leqslant (M - m)(\bar{x} - x_{j-1}) + (M - m)(x_j - \bar{x}) \\ &= (M - m)\Delta x_j \leqslant (M - m)\|\pi\|. \end{aligned}$$

即 $S(\pi) \geqslant S(\pi') \geqslant S(\pi) - (M - m)\|\pi\|$.下和的情形同理可证. $\square$

续

Proof.

$$s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_j \Delta x_j + \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i,$$

续

Proof.

$$s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_j \Delta x_j + \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i,$$

$$s(\pi') = m_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + m_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i,$$

Proof.

$$s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_j \Delta x_j + \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i,$$

$$s(\pi') = m_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + m_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i,$$

这里 m_j' 及 m_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_j]$ 上的下确界.

Proof.

$$s(\pi)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_j \Delta x_j + \sum_{i\neq j} m_i \Delta x_i,$$

$$s(\pi')=m_j'(\bar{x}-x_{j-1})+m_j''(x_j-\bar{x})+\sum_{i\neq j} m_i \Delta x_i,$$

这里 m_j' 及 m_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1},\bar{x}]$ 及 $[\bar{x},x_j]$ 上的下确界.因为 $m_j' \geqslant m_j$, $m_j'' \geqslant m_j$,

续

Proof.

$$s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_j \Delta x_j + \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i,$$

$$s(\pi') = m_j'(\bar{x} - x_{j-1}) + m_j''(x_j - \bar{x}) + \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i,$$

这里 m_j' 及 m_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_j]$ 上的下确界.因为 $m_j' \geqslant m_j$, $m_j'' \geqslant m_j$,从而有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant s(\pi') - s(\pi) &= (m_j' - m_j)(\bar{x} - x_{j-1}) + (m_j'' - m_j)(x_j - \bar{x}) \\ &\leqslant (M - m)(\bar{x} - x_{j-1}) + (M - m)(x_j - \bar{x}) \\ &= (M - m)\Delta x_j \leqslant (M - m)\|\pi\|. \end{aligned}$$

Proof.

$$s(\pi)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = m_j\Delta x_j + \sum_{i\neq j} m_i\Delta x_i,$$

$$s(\pi')=m_j'(\bar{x}-x_{j-1})+m_j''(x_j-\bar{x})+\sum_{i\neq j} m_i\Delta x_i,$$

这里 m_j' 及 m_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1},\bar{x}]$ 及 $[\bar{x},x_j]$ 上的下确界.因为 $m_j'\geqslant m_j$, $m_j''\geqslant m_j$,从而有

$$\begin{aligned}0\leqslant s(\pi')-s(\pi)&=(m_j'-m_j)(\bar{x}-x_{j-1})+(m_j''-m_j)(x_j-\bar{x})\\&\leqslant (M-m)(\bar{x}-x_{j-1})+(M-m)(x_j-\bar{x})\\&=(M-m)\Delta x_j\leqslant (M-m)\|\pi\|.\end{aligned}$$

即 $s(\pi)\leqslant s(\pi')\leqslant s(\pi)+(M-m)\|\pi\|$. □

任意下和不超过任意上和

推论

对于任意两个分割 π_1 及 π_2, 有

$$s(\pi_1) \leqslant S(\pi_2).$$

任意下和不超过任意上和

推论

对于任意两个分割 π_1 及 π_2, 有

$$s(\pi_1) \leqslant S(\pi_2).$$

Proof.

用 $\pi_1 \cup \pi_2$ 表示将 π_1 和 π_2 的所有分点合并后得到的分割(重复的分点只取一次),

任意下和不超过任意上和

推论

对于任意两个分割 π_1 及 π_2, 有

$$s(\pi_1) \leqslant S(\pi_2).$$

Proof.

用 $\pi_1 \cup \pi_2$ 表示将 π_1 和 π_2 的所有分点合并后得到的分割(重复的分点只取一次),则 $\pi_1 \cup \pi_2$ 既可以看成由 π_1 添加分点而来,

任意下和不超过任意上和

推论

对于任意两个分割 π_1 及 π_2, 有

$$s(\pi_1) \leqslant S(\pi_2).$$

Proof.

用 $\pi_1 \cup \pi_2$ 表示将 π_1 和 π_2 的所有分点合并后得到的分割(重复的分点只取一次),则 $\pi_1 \cup \pi_2$ 既可以看成由 π_1 添加分点而来,又可以看成从 π_2 添加分点而来.

任意下和不超过任意上和

推论

对于任意两个分割 π_1 及 π_2, 有

$$s(\pi_1) \leqslant S(\pi_2).$$

Proof.

用 $\pi_1 \cup \pi_2$ 表示将 π_1 和 π_2 的所有分点合并后得到的分割(重复的分点只取一次),则 $\pi_1 \cup \pi_2$ 既可以看成由 π_1 添加分点而来,又可以看成从 π_2 添加分点而来.由前面的引理, 有

$$s(\pi_1) \leqslant s(\pi_1 \cup \pi_2) \leqslant S(\pi_1 \cup \pi_2) \leqslant S(\pi_2).$$

任意下和不超过任意上和

推论

对于任意两个分割 π_1 及 π_2, 有

$$s(\pi_1) \leqslant S(\pi_2).$$

Proof.

用 $\pi_1 \cup \pi_2$ 表示将 π_1 和 π_2 的所有分点合并后得到的分割(重复的分点只取一次),则 $\pi_1 \cup \pi_2$ 既可以看成由 π_1 添加分点而来,又可以看成从 π_2 添加分点而来.由前面的引理, 有

$$s(\pi_1) \leqslant s(\pi_1 \cup \pi_2) \leqslant S(\pi_1 \cup \pi_2) \leqslant S(\pi_2).$$

这也就是说任意下和总是不超过任意上和. $\square$

Darboux 定理

定理

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

定理

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

Proof.

根据定义, 总有下面的估计:

$$m(b-a) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant M(b-a),$$

定理

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

Proof.

根据定义, 总有下面的估计:

$$m(b-a) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant M(b-a),$$

因此, $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 和 $\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 都存在.

定理

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \qquad \lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

Proof.

根据定义, 总有下面的估计:

$$m(b-a) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant M(b-a),$$

因此, $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 和 $\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 都存在.

任给 $\varepsilon > 0$, 由下确界的定义知, 存在分割 π', 使得

$$S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Proof.

设 π' 由 k 个分点构成.

Proof.

设 π' 由 k 个分点构成.对于任意另一个分割 π,

Proof.

设 π' 由 k 个分点构成.对于任意另一个分割 π,$\pi \cup \pi'$ 至多比 π 多 k 个分点.

Proof.

设 π' 由 k 个分点构成.对于任意另一个分割 π,$\pi \cup \pi'$ 至多比 π 多 k 个分点.由前面的引理, 有

$$S(\pi) - (M - m)k\|\pi\| \leqslant S(\pi \cup \pi') \leqslant S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Proof.

设 π' 由 k 个分点构成.对于任意另一个分割 π,$\pi\cup\pi'$ 至多比 π 多 k 个分点.由前面的引理, 有

$$S(\pi)-(M-m)k\|\pi\|\leqslant S(\pi\cup\pi')\leqslant S(\pi')<\inf_{\pi}S(\pi)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\|\pi\|<\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}$ 时,

$$\inf_{\pi}S(\pi)\leqslant S(\pi)\leqslant(M-m)k\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}+\inf_{\pi}S(\pi)+\frac{\varepsilon}{2}<\inf_{\pi}S(\pi)+\varepsilon.$$

Proof.

设 π' 由 k 个分点构成.对于任意另一个分割 π,$\pi\cup\pi'$ 至多比 π 多 k 个分点.由前面的引理, 有

$$S(\pi)-(M-m)k\|\pi\|\leqslant S(\pi\cup\pi')\leqslant S(\pi')<\inf_{\pi}S(\pi)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\|\pi\|<\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}$ 时,

$$\inf_{\pi}S(\pi)\leqslant S(\pi)\leqslant(M-m)k\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}+\inf_{\pi}S(\pi)+\frac{\varepsilon}{2}<\inf_{\pi}S(\pi)+\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}S(\pi)=\inf_{\pi}S(\pi).$$

Proof.

设 π' 由 k 个分点构成.对于任意另一个分割 π,$\pi\cup\pi'$ 至多比 π 多 k 个分点.由前面的引理, 有

$$S(\pi)-(M-m)k\|\pi\|\leqslant S(\pi\cup\pi')\leqslant S(\pi')<\inf_{\pi}S(\pi)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\|\pi\|<\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}$ 时,

$$\inf_{\pi}S(\pi)\leqslant S(\pi)\leqslant(M-m)k\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}+\inf_{\pi}S(\pi)+\frac{\varepsilon}{2}<\inf_{\pi}S(\pi)+\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}S(\pi)=\inf_{\pi}S(\pi).$$

下和的极限同理可证. $\square$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义知, 存在分割 π', 使得

$$s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义知, 存在分割 π', 使得

$$s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 π' 同上,

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义知, 存在分割 π', 使得

$$s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 π' 同上, 由前面的引理, 有

$$s(\pi) + (M - m)k\|\pi\| \geqslant s(\pi \cup \pi') \geqslant s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义知, 存在分割 π', 使得

$$s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 π' 同上, 由前面的引理, 有

$$s(\pi) + (M-m)k\|\pi\| \geqslant s(\pi \cup \pi') \geqslant s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\|\pi\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}$ 时,

$$\sup_{\pi} s(\pi) \geqslant s(\pi) \geqslant \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2} - (M-m)k\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k} > \sup_{\pi} S(\pi) - \varepsilon.$$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义知, 存在分割 π', 使得

$$s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 π' 同上, 由前面的引理, 有

$$s(\pi) + (M - m)k\|\pi\| \geqslant s(\pi \cup \pi') \geqslant s(\pi') > \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\|\pi\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}$ 时,

$$\sup_{\pi} s(\pi) \geqslant s(\pi) \geqslant \sup_{\pi} s(\pi) - \frac{\varepsilon}{2} - (M - m)k\frac{\varepsilon}{2(M - m + 1)k} > \sup_{\pi} S(\pi) - \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

□

可积的充要条件

可积的充要条件

我们称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**上积分**,

可积的充要条件

我们称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**,$\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**下积分**.

可积的充要条件

我们称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**,$\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**下积分**.

Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中.

可积的充要条件

我们称 $\inf_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**上积分**,$\sup_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**下积分**.

Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中.

定理 (可积的充要条件)

设 f 为 $[a, b]$ 上的有界函数, 则以下命题等价:

可积的充要条件

我们称 $\inf_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**上积分**,$\sup_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**下积分**.

Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中.

定理 (可积的充要条件)

设 f 为 $[a, b]$ 上的有界函数, 则以下命题等价:

- *(1)* f 在 $[a, b]$ 上 *Riemann* 可积;

可积的充要条件

我们称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**上积分**,$\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**下积分**.

Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中.

定理 (可积的充要条件)

设 f 为 $[a, b]$ 上的有界函数, 则以下命题等价:

- *(1)* f 在 $[a, b]$ 上 *Riemann* 可积;
- *(2)* f 在 $[a, b]$ 上的上积分和下积分相等;

可积的充要条件

我们称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**,$\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**下积分**.

Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中.

定理 (可积的充要条件)

设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则以下命题等价:

- *(1)* f 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积;
- *(2)* f 在 $[a,b]$ 上的上积分和下积分相等;
- *(3)* $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$;

可积的充要条件

我们称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**,$\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的**下积分**.

Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中.

定理 (可积的充要条件)

设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则以下命题等价:

- *(1)* f 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积;
- *(2)* f 在 $[a,b]$ 上的上积分和下积分相等;
- *(3)* $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$;
- *(4)* 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的某个分割 π, 使得

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2):设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 其积分为 I.

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2):设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 其积分为 I.于是任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时, 有

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<I+\varepsilon,\quad \forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2):设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 其积分为 I.于是任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$I - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < I + \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

特别地, 我们得到

$$\begin{aligned} I - \varepsilon &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\Delta x_i = s(\pi) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\Delta x_i = S(\pi) \\ &\leqslant I + \varepsilon, \end{aligned}$$

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2):设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 其积分为 I.于是任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$I - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < I + \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

特别地, 我们得到

$$\begin{aligned} I - \varepsilon &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\Delta x_i = s(\pi) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\Delta x_i = S(\pi) \\ &\leqslant I + \varepsilon, \end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{\|\pi\| \to 0} s(\pi) = \lim\limits_{\|\pi\| \to 0} S(\pi) = I$.

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2):设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 其积分为 I.于是任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时, 有

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<I+\varepsilon, \quad \forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

特别地, 我们得到

$$\begin{aligned} I-\varepsilon &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = s(\pi) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = S(\pi) \\ &\leqslant I+\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} s(\pi)=\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} S(\pi)=I$.由 Darboux 定理即知 f 的上下积分相等. $\square$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1):

Proof.

$(2) \Rightarrow (1)$:设 $\sup\limits_{\pi} s(\pi) = \inf\limits_{\pi} S(\pi) = I$.

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1):设 $\sup_\pi s(\pi) = \inf_\pi S(\pi) = I$.由 Darboux 定理, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$I - \varepsilon < s(\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(\pi) < I + \varepsilon,$$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1):设 $\sup\limits_{\pi} s(\pi) = \inf\limits_{\pi} S(\pi) = I$.由 Darboux 定理, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$I - \varepsilon < s(\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(\pi) < I + \varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1):设 $\sup\limits_{\pi} s(\pi) = \inf\limits_{\pi} S(\pi) = I$.由 Darboux 定理, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$I - \varepsilon < s(\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(\pi) < I + \varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

即 f 在 $[a, b]$ 上可积, 积分为 I. $\square$

Proof.

(2) $\Leftrightarrow$ (3):

Proof.

(2) $\Leftrightarrow$ (3):这可由 Darboux 定理及下式得到

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\lim_{\|\pi\|\to 0}(S(\pi)-s(\pi))=\inf_{\pi}S(\pi)-\sup_{\pi}s(\pi).$$

Proof.

(2) $\Leftrightarrow$ (3):这可由 Darboux 定理及下式得到

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i = \lim_{\|\pi\|\to 0}(S(\pi)-s(\pi)) = \inf_{\pi} S(\pi) - \sup_{\pi} s(\pi).$$

(3) $\Rightarrow$ (4):

Proof.

(2) $\Leftrightarrow$ (3):这可由 Darboux 定理及下式得到

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\lim_{\|\pi\|\to 0}(S(\pi)-s(\pi))=\inf_{\pi}S(\pi)-\sup_{\pi}s(\pi).$$

(3) $\Rightarrow$ (4):这是显然的. $\square$

Proof.

$(4) \Rightarrow (2)$:

Proof.

$(4) \Rightarrow (2)$:如果存在分割 π, 使得 $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$,

Proof.

(4) $\Rightarrow$ (2):如果存在分割 π, 使得 $S(\pi)-s(\pi)<\varepsilon$,则由

$$s(\pi)\leqslant\sup_{\pi'}s(\pi')\leqslant\inf_{\pi'}S(\pi')\leqslant S(\pi)$$

知

$$0\leqslant\inf_{\pi'}S(\pi')-\sup_{\pi'}s(\pi')\leqslant S(\pi)-s(\pi)<\varepsilon.$$

Proof.

$(4) \Rightarrow (2)$:如果存在分割 π, 使得 $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$,则由

$$s(\pi) \leqslant \sup_{\pi'} s(\pi') \leqslant \inf_{\pi'} S(\pi') \leqslant S(\pi)$$

知

$$0 \leqslant \inf_{\pi'} S(\pi') - \sup_{\pi'} s(\pi') \leqslant S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性即知 f 的上和与下和相等. □

若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则在 $[a, b]$ 的子区间上也可积

推论

(1) 设 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上也可积;

若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则在 $[a, b]$ 的子区间上也可积

推论

(1) 设 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上也可积;

(2) 设 $c \in [a, b]$, 若 f 在 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则在 $[a,b]$ 的子区间上也可积

推论

(1) 设 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积;

(2) 设 $c\in[a,b]$, 若 f 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

Proof.

(1) $\forall\varepsilon>0$, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故由可积的充要条件, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

推论

(1) 设 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积;

(2) 设 $c\in[a,b]$, 若 f 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

Proof.

(1) $\forall\varepsilon>0$, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故由可积的充要条件, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

取 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割 π', 使得 $\|\pi'\|<\delta$.

若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则在 $[a,b]$ 的子区间上也可积

推论

(1) 设 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积;

(2) 设 $c\in[a,b]$, 若 f 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

Proof.

(1) $\forall\varepsilon>0$, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故由可积的充要条件, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

取 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割 π', 使得 $\|\pi'\|<\delta$.显然, 可构造 $[a,b]$ 的分割 π, 使得 π 是 π' 通过添加 $[a,b]-[\alpha,\beta]$ 上的分点得到, 且 $\|\pi\|<\delta$, 则

$$\sum_{\pi'}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{\pi}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

推论

(1) 设 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上也可积;

(2) 设 $c \in [a, b]$, 若 f 在 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

Proof.

(1) $\forall \varepsilon > 0$, 由于 f 在 $[a, b]$ 上可积, 故由可积的充要条件, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

取 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割 π', 使得 $\|\pi'\| < \delta$.显然, 可构造 $[a, b]$ 的分割 π, 使得 π 是 π' 通过添加 $[a, b] - [\alpha, \beta]$ 上的分点得到, 且 $\|\pi\| < \delta$, 则

$$\sum_{\pi'} \omega_i \Delta x_i \leqslant \sum_{\pi} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

由可积的充要条件知, f 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积. □

Proof.

(2) f 在 $[a, c]$ 上可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, c]$ 的一个分割 π_1, 使得

$$S(\pi_1) - s(\pi_1) = \sum_{\pi_1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Proof.

(2) f 在 $[a, c]$ 上可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, c]$ 的一个分割 π_1, 使得

$$S(\pi_1) - s(\pi_1) = \sum_{\pi_1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

又 f 在 $[c, b]$ 上可积, 对上面的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[c, b]$ 的一个分割 π_2, 使得

$$S(\pi_2) - s(\pi_2) = \sum_{\pi_2} \omega_j \Delta x_j < \varepsilon.$$

Proof.

(2) f 在 $[a, c]$ 上可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, c]$ 的一个分割 π_1, 使得

$$S(\pi_1) - s(\pi_1) = \sum_{\pi_1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

又 f 在 $[c, b]$ 上可积, 对上面的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[c, b]$ 的一个分割 π_2, 使得

$$S(\pi_2) - s(\pi_2) = \sum_{\pi_2} \omega_j \Delta x_j < \varepsilon.$$

$\pi_1 \cup \pi_2$ 是 $[a, b]$ 的一个分割.

Proof.

(2) f 在 $[a,c]$ 上可积, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,c]$ 的一个分割 π_1, 使得

$$S(\pi_1)-s(\pi_1)=\sum_{\pi_1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

又 f 在 $[c,b]$ 上可积, 对上面的 $\varepsilon>0$, 存在 $[c,b]$ 的一个分割 π_2, 使得

$$S(\pi_2)-s(\pi_2)=\sum_{\pi_2}\omega_j\Delta x_j<\varepsilon.$$

$\pi_1\cup\pi_2$ 是 $[a,b]$ 的一个分割.于是对于上面任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\pi=\pi_1\cup\pi_2$, 使得

$$S(\pi)-s(\pi)=\sum_{\pi_1\cup\pi_2}\omega_i\Delta x_i<2\varepsilon.$$

Proof.

(2) f 在 $[a, c]$ 上可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, c]$ 的一个分割 π_1, 使得

$$S(\pi_1) - s(\pi_1) = \sum_{\pi_1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

又 f 在 $[c, b]$ 上可积, 对上面的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[c, b]$ 的一个分割 π_2, 使得

$$S(\pi_2) - s(\pi_2) = \sum_{\pi_2} \omega_j \Delta x_j < \varepsilon.$$

$\pi_1 \cup \pi_2$ 是 $[a, b]$ 的一个分割.于是对于上面任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的一个分割 $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, 使得

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{\pi_1 \cup \pi_2} \omega_i \Delta x_i < 2\varepsilon.$$

这说明 f 在 $[a, b]$ 上可积. $\square$

应用可积充要条件证明一些简单的结论

$[a,b]$ 上两个可积函数的乘积也是可积函数

例

设 f, g 均为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则 fg 也是 $[a,b]$ 上的可积函数.

$[a, b]$ 上两个可积函数的乘积也是可积函数

例

设 f, g 均为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则 fg 也是 $[a, b]$ 上的可积函数.

分析.

要证 fg 在 $[a, b]$ 上的可积, 等价于证明

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i = 0$$

$[a, b]$ 上两个可积函数的乘积也是可积函数

例

设 f, g 均为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则 fg 也是 $[a, b]$ 上的可积函数.

分析.

要证 fg 在 $[a, b]$ 上的可积, 等价于证明

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i = 0$$

$\omega_i(fg)$ 是 fg 在分割 π 的第 i 个小区间上的振幅, 故

$$\omega_i(fg) = \sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} |(fg)(x) - (fg)(x')|.$$

□

Proof.

而

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')|$$

Proof.

而

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')|$$

因此, 可以对其进行放缩并利用所给条件.

Proof.

而

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')|$$

因此，可以对其进行放缩并利用所给条件.具体证明如下. □

Proof.

而

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')|$$

因此, 可以对其进行放缩并利用所给条件.具体证明如下. □

Proof.

因为可积函数是有界的, 故存在 $K > 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant K, \quad |g(x)| \leqslant K, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Proof.

而

$$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')|$$

因此, 可以对其进行放缩并利用所给条件.具体证明如下. □

Proof.

因为可积函数是有界的, 故存在 $K > 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant K, \quad |g(x)| \leqslant K, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

由可积的充要条件, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

Proof.

而

$$|f(x)g(x)-f(x')g(x')|=|f(x)g(x)-f(x)g(x')+f(x)g(x')-f(x')g(x')|$$

因此, 可以对其进行放缩并利用所给条件.具体证明如下. □

Proof.

因为可积函数是有界的, 故存在 $K>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant K, \quad |g(x)|\leqslant K, \quad \forall\, x\in[a,b].$$

由可积的充要条件, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2K+1}, \quad \sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

如果 $[x_{i-1},x_i]$ 为 π 中的一个小区间, 则 □

Proof.

$$
\begin{aligned}
\omega_i(fg) &= \sup_{x,x' \in [x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \\
&= \sup_{x,x' \in [x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')| \\
&\leqslant \sup_{x,x' \in [x_{i-1},x_i]} \Big[|f(x)||g(x) - g(x')| + |g(x')||f(x) - f(x')| \Big] \\
&\leqslant K(\omega_i(g) + \omega_i(f)),
\end{aligned}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\omega_i(fg) &= \sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \\
&= \sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')| \\
&\leqslant \sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} \Big[|f(x)||g(x) - g(x')| + |g(x')||f(x) - f(x')|\Big] \\
&\leqslant K(\omega_i(g) + \omega_i(f)),
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\sum_\pi \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant K\sum_\pi \big(\omega_i(f) + \omega_i(g)\big)\Delta x_i
&= K\sum_\pi \omega_i(f)\Delta x_i + K\sum_\pi \omega_i(g)\Delta x_i \\
&< K\frac{\varepsilon}{2K+1} + K\frac{\varepsilon}{2K+1} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Proof.

因此 fg 在 $[a, b]$ 上可积. $\square$

几类可积函数

可积函数类

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

可积函数类

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a, b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.

可积函数类

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a,b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

可积函数类

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a, b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a, b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

Proof.

(1) 已经证明.

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a,b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

Proof.

(1) 已经证明.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$,

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a,b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

Proof.

(1) 已经证明.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$,设 $\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ 为 f 的间断点,

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a,b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

Proof.

(1) 已经证明.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$,设 $\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ 为 f 的间断点,取

$$0 < \rho < \frac{\varepsilon}{4(M - m + 1)N},$$

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a, b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a, b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

Proof.

(1) 已经证明.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$,设 $\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ 为 f 的间断点,取

$$0 < \rho < \frac{\varepsilon}{4(M - m + 1)N},$$

使得 $(\bar{x}_k - \rho, \bar{x}_k + \rho)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ 互不相交,

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a,b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

Proof.

(1) 已经证明.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$,设 $\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ 为 f 的间断点,取

$$0 < \rho < \frac{\varepsilon}{4(M-m+1)N},$$

使得 $(\bar{x}_k - \rho, \bar{x}_k + \rho)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ 互不相交,去掉这些开区间后, $[a,b]$ 剩下的部分由有限个闭区间组成,

定理

- *(1)* 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
- *(2)* 若有界函数 f 只在 $[a,b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积.
- *(3)* 若 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 可积.

Proof.

(1) 已经证明.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$,设 $\bar{x}_k$ $(k=1,2,\ldots,N)$ 为 f 的间断点,取

$$0 < \rho < \frac{\varepsilon}{4(M-m+1)N},$$

使得 $(\bar{x}_k-\rho, \bar{x}_k+\rho)$ $(k=1,2,\ldots,N)$ 互不相交,去掉这些开区间后, $[a,b]$ 剩下的部分由有限个闭区间组成,且 f 在这些闭区间上连续. □

Proof.

根据闭区间上连续函数的一致连续性,

Proof.

根据闭区间上连续函数的一致连续性,可以取这些闭区间的分割, 使得 f 在每个小区间上的振幅均小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Proof.

根据闭区间上连续函数的一致连续性,可以取这些闭区间的分割, 使得 f 在每个小区间上的振幅均小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.这些闭区间的分割连同 $[\bar{x}_k-\rho,\bar{x}_k+\rho]$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ 组成了 $[a,b]$ 的分割, 记为 π.

Proof.

根据闭区间上连续函数的一致连续性,可以取这些闭区间的分割, 使得 f 在每个小区间上的振幅均小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.这些闭区间的分割连同 $[\bar{x}_k-\rho,\bar{x}_k+\rho]$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ 组成了 $[a,b]$ 的分割, 记为 π.对于此分割, 有

$$
\begin{aligned}
S(\pi)-s(\pi) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+(M-m)\sum_{i=1}^{N}2\rho \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+(M-m)\frac{2N\varepsilon}{4(M-m+1)N}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Proof.

根据闭区间上连续函数的一致连续性,可以取这些闭区间的分割, 使得 f 在每个小区间上的振幅均小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.这些闭区间的分割连同 $[\bar{x}_k-\rho,\bar{x}_k+\rho]$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ 组成了 $[a,b]$ 的分割, 记为 π.对于此分割, 有

$$\begin{aligned}S(\pi)-s(\pi)&\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+(M-m)\sum_{i=1}^{N}2\rho\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+(M-m)\frac{2N\varepsilon}{4(M-m+1)N}<\varepsilon.\end{aligned}$$

由可积的充要条件知 f 在 $[a,b]$ 上可积. $\square$

Proof.

(3) 设 f 为 $[a, b]$ 上单调函数, 不妨设 f 单调递增.

Proof.

(3) 设 f 为 $[a, b]$ 上单调函数, 不妨设 f 单调递增.任给 $\varepsilon > 0$, 任取 $[a, b]$ 的分割 π, 使得

$$\|\pi\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1},$$

Proof.

(3) 设 f 为 $[a,b]$ 上单调函数, 不妨设 f 单调递增.任给 $\varepsilon > 0$, 任取 $[a,b]$ 的分割 π, 使得

$$\|\pi\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1},$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_i) - f(x_{i-1}) \Big) \Delta x_i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_i) - f(x_{i-1}) \Big) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \\
&= \Big(f(x_n) - f(x_0) \Big) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \\
&= \big(f(b) - f(a) \big) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

Proof.

(3) 设 f 为 $[a,b]$ 上单调函数, 不妨设 f 单调递增.任给 $\varepsilon>0$, 任取 $[a,b]$ 的分割 π, 使得

$$\|\pi\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1},$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)-f(x_{i-1})\Big)\Delta x_i\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)-f(x_{i-1})\Big)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}\\&=\Big(f(x_n)-f(x_0)\Big)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}\\&=\big(f(b)-f(a)\big)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}<\varepsilon,\end{aligned}$$

由可积的充要条件知 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

定义

设 f 为 $[a, b]$ 上定义的函数, 如果存在 $[a, b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得 f 在每一个小区间 (x_{i-1}, x_i) 内均为常数, 则称 f 为**阶梯函数**.

定义

设 f 为 $[a, b]$ 上定义的函数, 如果存在 $[a, b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得 f 在每一个小区间 (x_{i-1}, x_i) 内均为常数, 则称 f 为**阶梯函数**.

推论

阶梯函数均为可积函数.

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.

欢迎访问 atzjg.net