



有理函数的积分

徐海峰整理

December 2, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

其他参考文献.

有理函数的积分

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$.

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$. 则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为有理函数.

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$. 则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为有理函数.

如果 $n < m$, 则称 R 为真分式.

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$. 则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为有理函数.

如果 $n < m$, 则称 R 为**真分式**. 显然, 任何有理函数都可以写成一个多项式和一个真分式之和.

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$. 则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为有理函数.

如果 $n < m$, 则称 R 为**真分式**. 显然, 任何有理函数都可以写成一个多项式和一个真分式之和. 因此, 有理函数的积分只要考虑真分式的情形即可.

根据实系数多项式的因式分解可以证明, 真分式可以进一步分解为下面两种简单真分式之和:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad (k \geq 1); \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad (k \geq 1, p^2-4q < 0).$$

(1) $k = 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C$$

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C$$

(2) $k > 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$$

(2) $k > 1$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C;$$

(1) $k = 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

(2) $k > 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

(2) $k > 1$:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{A}{2} \frac{(x^2 + px + q)^{1-k}}{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$$

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

(2) $k > 1$:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{A}{2} \frac{(x^2 + px + q)^{1-k}}{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$$

其中

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad a = \frac{1}{2} \sqrt{4q - p^2}.$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx \\
&= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + (B - \frac{Ap}{2})}{x^2 + px + q} dx \\
&= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \\
&= \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} \\
&= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C
\end{aligned}$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

首先考虑 $(x^2 + px + q)^{1-k}$ 的导数,

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

首先考虑 $(x^2 + px + q)^{1-k}$ 的导数,

$$\left[(x^2 + px + q)^{1-k} \right]' = (1-k)(x^2 + px + q)^{-k}(2x + p),$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

首先考虑 $(x^2 + px + q)^{1-k}$ 的导数,

$$\left[(x^2 + px + q)^{1-k} \right]' = (1-k)(x^2 + px + q)^{-k}(2x + p),$$

因此,

$$\left[\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k} (x^2 + px + q)^{1-k} \right]' = \frac{Ax + \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k}$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

首先考虑 $(x^2 + px + q)^{1-k}$ 的导数,

$$\left[(x^2 + px + q)^{1-k} \right]' = (1-k)(x^2 + px + q)^{-k}(2x + p),$$

因此,

$$\left[\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k} (x^2 + px + q)^{1-k} \right]' = \frac{Ax + \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k}$$

将被积函数作拆分

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{Ax + \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \int \frac{Ax + \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k} dx + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k} dx \\&= \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k} (x^2 + px + q)^{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx \\&= \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k} (x^2 + px + q)^{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \int \frac{Ax + \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k} dx + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k} dx \\&= \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k} (x^2 + px + q)^{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx \\&= \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k} (x^2 + px + q)^{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}\end{aligned}$$

其中 $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$.

而 $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$ 可用递推的方法计算. 具体可参见问题1448.

而 $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$ 可用递推的方法计算. 具体可参见问题1448.

命题

若记 $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$, 则有递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}.$$

Proof.

显然 $I_0 = t + C$, $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$.

Proof.

显然 $I_0 = t + C$, $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$. 当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} - \int t d \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{t^2 + a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt - a^2 \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt \right] \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

Proof.

显然 $I_0 = t + C$, $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$. 当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} - \int t d \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{t^2 + a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt - a^2 \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt \right] \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

这样就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{t}{(t^2 + a^2)^n},$$

Proof.

显然 $I_0 = t + C$, $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$. 当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} - \int t d \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{t^2 + a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt - a^2 \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt \right] \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

这样就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{t}{(t^2 + a^2)^n},$$

由此可以求出所有的 I_n .

□

例子

例

求不定积分 $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3} dx$.

例

求不定积分 $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3} dx$.

解. 利用长除法（或附录中使用Sowya）将 $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

例

求不定积分 $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3} dx$.

解. 利用长除法（或附录中使用Sowya）将 $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3} = x + 2 + \frac{(x - 1) - 4}{(x - 1)^2 + 2}.$$

例

求不定积分 $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3} dx$.

解. 利用长除法（或附录中使用Sowya）将 $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3} = x + 2 + \frac{(x - 1) - 4}{(x - 1)^2 + 2}.$$

因此

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \int \frac{(x - 1) - 4}{(x - 1)^2 + 2} dx$$



解. 其中

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2} dx &= \int \frac{(x-1)}{(x-1)^2+2} dx - 4 \int \frac{1}{(x-1)^2+2} dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1)^2}{(x-1)^2+2} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C \\&= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) - 2\sqrt{2} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

续

解. 其中

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2} dx &= \int \frac{(x-1)}{(x-1)^2+2} dx - 4 \int \frac{1}{(x-1)^2+2} dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1)^2}{(x-1)^2+2} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C \\&= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) - 2\sqrt{2} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) - 2\sqrt{2} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

■

使用Sowya作多项式的长除法

例

将 $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

例

将 $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

```
>> div(x^3+1,x^2-2x+3)
```

```
quotient> q(x) = x+2
```

```
remainder> r(x) = x-5
```

```
(x^1+2)+(x^1-5)/(x^2-2x+3)
```

```
-----
```

欢迎访问 atzjg.net