Taylor 展开

徐海峰整理

November 19, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

Taylor 展开

这一节我们研究用多项式逼近高阶可微函数的问题.

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad (x \to x_0),$$

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用常值函数 $f(x_0)$ 逼近.

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用常值函数 $f(x_0)$ 逼近.

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad (x \to x_0),$$

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用常值函数 $f(x_0)$ 逼近.

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用线性函数 L 逼近, 其中

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用常值函数 $f(x_0)$ 逼近.

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用线性函数 L 逼近, 其中

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2] = o((x - x_0)^2) \quad (x \to x_0),$$

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用常值函数 $f(x_0)$ 逼近.

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用线性函数 L 逼近, 其中

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- 如果 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2] = o((x - x_0)^2) \quad (x \to x_0),$$

即在 x_0 附近 f 可用二次多项式逼近.

带 Peano 余项的 Taylor 公式

定理

设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0). \end{aligned} \tag{*}$$

Proof.

记

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

Proof.

记

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

这是一个 n 次多项式. 记 $R_n(x)$ 或 $R_n(f, x)$ 是 f 和该多项式的差,

$$R_n(x) = R_n(f, x) = f(x) - P_n(x).$$

Proof.

记

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

这是一个 n 次多项式. 记 $R_n(x)$ 或 $R_n(f, x)$ 是 f 和该多项式的差,

$$R_n(x) = R_n(f, x) = f(x) - P_n(x).$$

我们要证明

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

Proof.

记

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

这是一个 n 次多项式. 记 $R_n(x)$ 或 $R_n(f, x)$ 是 f 和该多项式的差,

$$R_n(x) = R_n(f, x) = f(x) - P_n(x).$$

我们要证明

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

用数学归纳法来证.

Proof.

记

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

这是一个 n 次多项式. 记 $R_n(x)$ 或 $R_n(f, x)$ 是 f 和该多项式的差,

$$R_n(x) = R_n(f, x) = f(x) - P_n(x).$$

我们要证明

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

用数学归纳法来证.对 $n = 1, 2$ 的情形已经验证.

Proof.

记

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

这是一个 n 次多项式. 记 $R_n(x)$ 或 $R_n(f, x)$ 是 f 和该多项式的差,

$$R_n(x) = R_n(f, x) = f(x) - P_n(x).$$

我们要证明

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

用数学归纳法来证.对 $n = 1, 2$ 的情形已经验证.设 $n = k$ 时 $(*)$ 成立, 则 $n = k + 1$ 时, $f'(x)$ 满足归纳假设, $\square$

续

Proof.

$$R_{k+1}(f,x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1} \right]$$

Proof.

$$R_{k+1}(f,x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}\right]$$

$$\begin{aligned} R'_{k+1}(f,x) &= f'(x) - \left[f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{k!}(f')^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k}\right] \\ &= R_k(f',x) = o((x-x_0)^k) \quad (x \to x_0). \end{aligned}$$

续

Proof.

$$R_{k+1}(f,x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}\right]$$

$$\begin{aligned} R'_{k+1}(f,x) &= f'(x) - \left[f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{k!}(f')^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k}\right] \\ &= R_k(f',x) = o((x-x_0)^k) \quad (x \to x_0). \end{aligned}$$

由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{k+1}(f,x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{R'_{k+1}(f,x)}{(k+1)(x-x_0)^{k}} = 0,$$

续

Proof.

$$R_{k+1}(f,x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1} \right]$$

$$\begin{aligned} R'_{k+1}(f,x) &= f'(x) - \left[f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{k!}(f')^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \right] \\ &= R_k(f',x) = o((x-x_0)^k) \quad (x \to x_0). \end{aligned}$$

由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{k+1}(f,x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{R'_{k+1}(f,x)}{(k+1)(x-x_0)^k} = 0,$$

即 $(*)$ 对 $n = k+1$ 成立, 定理得证. □

Taylor 展开的余项

R_n 称为 Taylor 展开的余项.

R_n 称为 Taylor 展开的余项.如果 f 有更好的可微性, 那么我们可以更好地估计余项的大小.

Taylor 展开的余项

R_n 称为 Taylor 展开的余项.如果 f 有更好的可微性, 那么我们可以更好地估计余项的大小.

定理 (Taylor)

设 f 在开区间 (a, b) 内有直到 $n+1$ 阶导数, $x_0, x \in (a, b)$, 则存在区间 (x, x_0) （或 (x_0, x) 内的点 ξ, ζ, 使得 *Taylor* 展开的余项可表示为

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}, \quad \textit{(Lagrange 余项)}$$

定理 (Taylor)

设 f 在开区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶导数, $x_0, x \in (a,b)$, 则存在区间 (x, x_0) （或 (x_0, x) 内的点 ξ, ζ, 使得 *Taylor* 展开的余项可表示为

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}, \quad \textit{(Lagrange 余项)}$$

以及

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^n(x-x_0). \quad \textit{(Cauchy 余项)}$$

Proof.

考虑以 t 为变量的函数

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad t \in (a,b).$$

Proof.

考虑以 t 为变量的函数

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\quad t\in(a,b).$$

对 t 求导, 得

$$\begin{aligned}
F'(t)&=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\Big]\\
&=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\\
&=f'(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j\\
&=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n,
\end{aligned}$$

续

Proof.

根据 F 的构造, $F(x) = f(x)$,

$$F(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

续

Proof.

根据 F 的构造, $F(x) = f(x)$,

$$F(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

于是

$$F(x) - F(x_0) = R_n(x).$$

续

Proof.

根据 F 的构造, $F(x) = f(x)$,

$$F(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

于是

$$F(x) - F(x_0) = R_n(x).$$

由 Lagrange 微分中值定理, 存在 $\zeta = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(0 < \theta < 1)$, 使得

$$\begin{aligned} R_n(x) = F(x) - F(x_0) &= F'(\zeta)(x - x_0) \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)(x - \zeta)^n (x - x_0). \quad \text{（Cauchy 余项）} \end{aligned}$$

$\square$

Proof.

取 $G(t) = -(x-t)^{n+1}$, 再由 Cauchy 微分中值定理知, 存在 $\xi = x_0 + \eta(x - x_0)$ $(0 < \eta < 1)$, 使得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!},$$

续

Proof.

取 $G(t) = -(x-t)^{n+1}$, 再由 Cauchy 微分中值定理知, 存在 $\xi = x_0 + \eta(x - x_0)$ $(0 < \eta < 1)$, 使得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!},$$

即

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}. \quad \text{（Lagrange 余项）}$$

Proof.

取 $G(t) = -(x-t)^{n+1}$, 再由 Cauchy 微分中值定理知, 存在 $\xi = x_0 + \eta(x - x_0)$ $(0 < \eta < 1)$, 使得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!},$$

即

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}. \qquad \text{（Lagrange 余项）}$$

这就得到了 Taylor 展开余项的两种表达式. □

注

事实上, 可以令 $G(t)=m(x-t)^{n+1}$, m 是任意不为零的实数. 则

$$G(x)-G(x_0)=0-m(x-x_0)^{n+1},\quad G'(t)=m(n+1)(x-t)^n\cdot(-1).$$

于是由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(x,x_0)$ 或 $\xi\in(x_0,x)$, 使得

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-m(n+1)(x-\xi)^n}=-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

这推出

$$\begin{aligned}R_n(x)=F(x)-F(x_0)&=-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot(-m)(x-x_0)^{n+1}\\&=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

注

- 如果 f 的直到 n 阶的导数在 $[a, b]$ 上都是连续的（因此 F 在 $[a, b]$ 上连续），则对 $x = a$ 或 $x = b$, 即区间的端点, 定理的结论仍然成立, 这是由微分中值定理成立的条件所保证的.

注

- 如果 f 的直到 n 阶的导数在 $[a, b]$ 上都是连续的（因此 F 在 $[a, b]$ 上连续），则对 $x = a$ 或 $x = b$, 即区间的端点, 定理的结论仍然成立, 这是由微分中值定理成立的条件所保证的.
- 如果 x_0 为区间端点, 例如 f 在 $(a, x_0]$ 上存在直到 $n + 1$ 阶的导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍然有如上 Taylor 余项公式.

注

- 如果 f 的直到 n 阶的导数在 $[a, b]$ 上都是连续的（因此 F 在 $[a, b]$ 上连续），则对 $x = a$ 或 $x = b$, 即区间的端点, 定理的结论仍然成立, 这是由微分中值定理成立的条件所保证的.
- 如果 x_0 为区间端点, 例如 f 在 $(a, x_0]$ 上存在直到 $n+1$ 阶的导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍然有如上 Taylor 余项公式.
- 在历史上, Taylor 是从插值多项式出发获得他的公式的.

例

将多项式函数 $f(x) = (1+x)^{2n+1}$ 在 $x = 0$ 处展开.

例

将多项式函数 $f(x) = (1+x)^{2n+1}$ 在 $x = 0$ 处展开.

Proof.

首先计算 f 的各阶导数.

例

将多项式函数 $f(x)=(1+x)^{2n+1}$ 在 $x=0$ 处展开.

Proof.

首先计算 f 的各阶导数.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (2n+1)(1+x)^{2n}, \\
f''(x) &= (2n+1)(2n)(1+x)^{2n-1}, \\
f'''(x) &= (2n+1)(2n)(2n-1)(1+x)^{2n-2}, \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(n+2)(1+x)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Proof.

于是

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= 2n+1, \\
f''(0) &= (2n+1)(2n), \\
f'''(0) &= (2n+1)(2n)(2n-1), \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= (2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(n+2).
\end{aligned}
$$

□

Proof.

因此,

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{2n+1} &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\
&= 1 + \frac{2n+1}{1}x^1 + \frac{(2n+1)(2n)}{2!}x^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(n+2)}{n!}x^n + R_n(x) \\
&= 1 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \cdots + C_{2n+1}^n x^n + R_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k x^k + R_n(x).
\end{aligned}
$$

□

麦克劳林公式

定义

如果 f 在 x_0 附近无限次可微, 则称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 f 在 x_0 处的 **Taylor 展开**或 **Taylor 公式**.

定义

如果 f 在 x_0 附近无限次可微, 则称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

为 f 在 x_0 处的 **Taylor 展开**或 **Taylor 公式**.

Taylor 公式在 $x_0 = 0$ 的特殊情形也称为 **Maclaurin 展开公式**.

麦克劳林公式

定义

如果 f 在 x_0 附近无限次可微, 则称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 f 在 x_0 处的 **Taylor 展开**或 **Taylor 公式**.

Taylor 公式在 $x_0 = 0$ 的特殊情形也称为 **Maclaurin 展开公式**.

如果 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 则记

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

麦克劳林公式

定义

如果 f 在 x_0 附近无限次可微, 则称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 f 在 x_0 处的 **Taylor 展开**或 **Taylor 公式**.

Taylor 公式在 $x_0 = 0$ 的特殊情形也称为 **Maclaurin 展开公式**.

如果 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 则记

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

此时称 f 的 Taylor 展开收敛到自身.

例

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $(-1, 1)$ 内任意次可微. 求 f 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开, 并判断收敛性.

例

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $(-1, 1)$ 内任意次可微. 求 f 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开, 并判断收敛性.

解. 利用数学归纳法容易计算 f 的各阶导数为

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

例

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $(-1,1)$ 内任意次可微. 求 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开, 并判断收敛性.

解. 利用数学归纳法容易计算 f 的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n=1,2,\ldots.$$

特别地, $f^{(n)}(0)=n!$, 因此 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

例

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $(-1,1)$ 内任意次可微. 求 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开, 并判断收敛性.

解. 利用数学归纳法容易计算 f 的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n=1,2,\ldots.$$

特别地, $f^{(n)}(0)=n!$, 因此 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

又因为余项

$$R_n(x)=\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\frac{x^{n+1}}{1-x}\to 0\quad(n\to\infty),$$

例

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $(-1,1)$ 内任意次可微. 求 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开, 并判断收敛性.

解. 利用数学归纳法容易计算 f 的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n=1,2,\ldots.$$

特别地, $f^{(n)}(0)=n!$, 因此 f 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

又因为余项

$$R_n(x)=\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\frac{x^{n+1}}{1-x}\to 0\quad (n\to\infty),$$

故得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad \forall\, x\in(-1,1).$$

例

求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开.

例

求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开.

解. f 的各阶导数仍为 f, 特别地 $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ $(n \geqslant 1)$,

例

求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开.

解. f 的各阶导数仍为 f, 特别地 $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ $(n \geqslant 1)$,因此 e^x 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

例

求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开.

解. f 的各阶导数仍为 f, 特别地 $f^{(n)}(0)=e^0=1\ (n\geqslant 1)$,因此 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

其 Lagrange 余项为

$$R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad (0<\theta<1),$$

例

求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开.

解. f 的各阶导数仍为 f, 特别地 $f^{(n)}(0)=e^0=1$ $(n\geqslant 1)$,因此 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

其 Lagrange 余项为

$$R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1),$$

因此有如下估计

$$|R_n(x)|\leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\quad(n\to\infty).$$

例

求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开.

解. f 的各阶导数仍为 f, 特别地 $f^{(n)}(0)=e^0=1\ (n\geqslant 1)$,因此 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

其 Lagrange 余项为

$$R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1),$$

因此有如下估计

$$|R_n(x)|\leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\quad(n\to\infty).$$

这里用到了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

∎

解. 因此

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

∎

解. 因此

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

∎

注

特别地,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

解. 因此

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots , \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

∎

注

特别地,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

由此容易说明 e 为无理数.

命题

证明 e 为无理数.

命题

证明 e 为无理数.

Proof.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

命题

证明 e 为无理数.

Proof.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

注意到 $\frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $k \geqslant 4$.

命题

证明 e 为无理数.

Proof.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

注意到 $\frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $k \geqslant 4$.因此

$$\begin{aligned} 2 < e &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \cdots \\ &= 3. \end{aligned}$$

命题

证明 e 为无理数.

Proof.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

注意到 $\frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $k \geqslant 4$.因此

$$\begin{aligned}
2 < e &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \cdots \\
&= 3.
\end{aligned}$$

这里对最后一个等号作一下说明. □

Proof.

记

$$S_n = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Proof.

记

$$S_n = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在, 则其极限被称为形式和

$$1 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

的和.

Proof.

记

$$S_n = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在, 则其极限被称为形式和

$$1 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

的和.易见

$$S_n = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 3 - \frac{1}{n+1} \to 3 \quad (n \to \infty)$$

Proof.

记

$$S_n = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在, 则其极限被称为形式和

$$1 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

的和.易见

$$S_n = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 3 - \frac{1}{n+1} \to 3 \quad (n \to \infty)$$

故

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \cdots = 3.$$

$\square$

Proof.

我们证明了 $2 < e < 3$, 这说明 e 不是整数.

Proof.

我们证明了 $2 < e < 3$, 这说明 e 不是整数.进一步, 如果 $e = \frac{p}{q}$ 是有理数（这里 p 和 q 是互素的正整数）, 则

$$q! \cdot e - q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

为整数.

Proof.

我们证明了 $2 < e < 3$, 这说明 e 不是整数.进一步, 如果 $e = \frac{p}{q}$ 是有理数（这里 p 和 q 是互素的正整数）, 则

$$q! \cdot e - q!\Big(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\Big)$$

为整数.另一方面, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$0 < q! \cdot e - q!\Big(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\Big) = \frac{e^{\theta}}{q + 1} < 1,$$

Proof.

我们证明了 $2 < e < 3$, 这说明 e 不是整数.进一步, 如果 $e = \frac{p}{q}$ 是有理数（这里 p 和 q 是互素的正整数）, 则

$$q! \cdot e - q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

为整数.另一方面, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$0 < q! \cdot e - q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \frac{e^\theta}{q+1} < 1,$$

这就导出了矛盾!

Proof.

我们证明了 $2 < e < 3$, 这说明 e 不是整数.进一步, 如果 $e = \frac{p}{q}$ 是有理数（这里 p 和 q 是互素的正整数）, 则

$$q! \cdot e - q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

为整数.另一方面, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$0 < q! \cdot e - q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \frac{e^\theta}{q+1} < 1,$$

这就导出了矛盾!这里用到了 Lagrange 余项.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{q!}x^q + \frac{e^\theta}{(q+1)!}x^{n+1}.$$

$\square$

例

求 $\sin x$, $\cos x$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开.

例

求 $\sin x$, $\cos x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开.

解. 在高阶导数一节, 已经求得

$$\sin^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi),\quad \cos^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

例

求 $\sin x$, $\cos x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开.

解. 在高阶导数一节, 已经求得

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi), \quad \cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n}{2}\pi), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

特别地,

$$\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad \sin^{(2k)}(0) = 0.$$

例

求 $\sin x$, $\cos x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开.

解. 在高阶导数一节, 已经求得

$$\sin^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi),\quad \cos^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

特别地,

$$\sin^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\quad \sin^{(2k)}(0)=0.$$

由 Taylor 展开的 Lagrange 余项公式得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}\cos\theta x}{(2n+3)!}\quad (0<\theta<1).$$

例

求 $\sin x$, $\cos x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开.

解. 在高阶导数一节, 已经求得

$$\sin^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi),\quad \cos^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n}{2}\pi),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

特别地,

$$\sin^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\quad \sin^{(2k)}(0)=0.$$

由 Taylor 展开的 Lagrange 余项公式得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}\cos\theta x}{(2n+3)!}\quad(0<\theta<1).$$

因为余项趋于零, 故可写为

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \forall\, x\in(-\infty,\infty).$$

∎

类似地,

$$\cos^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k.$$

类似地,

$$\cos^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k.$$

由 Taylor 展开的 Lagrange 余项公式得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \sin \theta x}{(2n+2)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

类似地,

$$\cos^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k.$$

由 Taylor 展开的 Lagrange 余项公式得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \sin \theta x}{(2n+2)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

因为余项趋于零, 故可写为

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty).$$

间接展开

为了更方便地得到更多函数的 Taylor 展开公式, 我们需要下面的结果.

为了更方便地得到更多函数的 Taylor 展开公式, 我们需要下面的结果.

定理 (Taylor 系数的惟一性)

设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 且

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \qquad (x \to x_0),$$

则

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Proof.

根据 Taylor 展开的 Peano 余项表示, $f(x)$ 又可写为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\quad (x\to x_0).$$

Proof.

根据 Taylor 展开的 Peano 余项表示, $f(x)$ 又可写为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\quad (x\to x_0).$$

若令

$$b_k=a_k-\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,2,\ldots,n,$$

则由已知条件得

$$\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k=o((x-x_0)^n)\qquad (x\to x_0).$$

Proof.

根据 Taylor 展开的 Peano 余项表示, $f(x)$ 又可写为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

若令

$$b_k = a_k - \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

则由已知条件得

$$\sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k = o((x - x_0)^n) \qquad (x \to x_0).$$

令 $x \to x_0$, 由于 $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k$ 趋于零, 可推出 $b_0 = 0$.

Proof.

根据 Taylor 展开的 Peano 余项表示, $f(x)$ 又可写为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\quad (x\to x_0).$$

若令

$$b_k=a_k-\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,2,\dots,n,$$

则由已知条件得

$$\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k=o((x-x_0)^n)\qquad (x\to x_0).$$

令 $x\to x_0$, 由于 $\sum\limits_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k$ 趋于零, 可推出 $b_0=0$.然后等式两边同除以 $x-x_0$, 再令 $x\to x_0$, 可得 $b_1=0$. 依次类推, 可推出 $b_k=0$, $k=2,3,\dots,n$. 证毕. $\square$

由唯一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题.

由唯一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题.

定理

设 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

由唯一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题.

定理

设 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

- $f(-x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$;

由唯一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题.

定理

设 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

- $f(-x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$;
- $f(x^k)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中 k 为正整数;

由唯一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题.

定理

设 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

- $f(-x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$;
- $f(x^k)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中 k 为正整数;
- $x^k f(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中 k 为正整数;

由唯一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题.

定理

设 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

- $f(-x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$;
- $f(x^k)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中 k 为正整数;
- $x^k f(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中 k 为正整数;
- $f'(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$;

由唯一性定理以及 Taylor 展开的定义可以推出下面有用的命题.

定理

设 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

- $f(-x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$;
- $f(x^k)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中 k 为正整数;
- $x^k f(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中 k 为正整数;
- $f'(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$;
- 如果 $g(x)$ 在 $x_0=0$ 处的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则 $\lambda f(x)+\mu g(x)$ 的 *Taylor* 展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n$, 其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Proof.

(1) 令 $g(x) = f(-x)$, 则 $g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$.

Proof.

(1) 令 $g(x)=f(-x)$, 则 $g^{(n)}(x)=(-1)^n f^{(n)}(-x)$.于是

$$f(-x)=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n.$$

Proof.

(1) 令 $g(x)=f(-x)$, 则 $g^{(n)}(x)=(-1)^n f^{(n)}(-x)$.于是

$$f(-x)=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n.$$

(2) 令 $g(x)=f(x^k)$, 则 $g'(x)=f'(x^k)kx^{k-1}$.

$\square$

常见函数的 Taylor 展开式

常见函数的 Taylor 展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

常见函数的 Taylor 展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

常见函数的 Taylor 展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$$

常见函数的 Taylor 展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$$