洛必达法则

徐海峰整理

October 28, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

洛必达

Figure 1: 洛必达（1661-1704）

Figure 1: 洛必达（1661-1704）

Guillaume de L'Hôpital 是一位法国数学家, 他撰写了第一本微积分教科书, 其中包括了他的老师约翰·伯努利（Johann Bernoulli）的讲座.

L’Hôpital出生于巴黎, 他的职业生涯始于骑兵军官. 然而, 他却因为目光短浅而被迫辞职, 将余生奉献给了数学学习和研究.

L'Hôpital出生于巴黎, 他的职业生涯始于骑兵军官. 然而, 他却因为目光短浅而被迫辞职, 将余生奉献给了数学学习和研究.

为此, 他于1691年邀请德国数学家让·伯努利（Jean Bernoulli）到他的城堡, 教他新做出的微积分的细节.

L'Hôpital出生于巴黎, 他的职业生涯始于骑兵军官. 然而, 他却因为目光短浅而被迫辞职, 将余生奉献给了数学学习和研究.

为此, 他于1691年邀请德国数学家让·伯努利（Jean Bernoulli）到他的城堡, 教他新做出的微积分的细节.

不久之后, L'Hôpital 出版了他的书 Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes（为理解曲线的无穷小量分析, 1696 年）.

L'Hôpital出生于巴黎, 他的职业生涯始于骑兵军官. 然而, 他却因为目光短浅而被迫辞职, 将余生奉献给了数学学习和研究.

为此, 他于1691年邀请德国数学家让·伯努利（Jean Bernoulli）到他的城堡, 教他新做出的微积分的细节.

不久之后, L'Hôpital 出版了他的书 Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes（为理解曲线的无穷小量分析, 1696 年）.

这是有史以来第一本微积分教科书.

L’Hôpital出生于巴黎，他的职业生涯始于骑兵军官. 然而，他却因为目光短浅而被迫辞职，将余生奉献给了数学学习和研究.

为此，他于1691年邀请德国数学家让·伯努利（Jean Bernoulli）到他的城堡，教他新做出的微积分的细节.

不久之后，L’Hôpital 出版了他的书 Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes（为理解曲线的无穷小量分析，1696 年）.

这是有史以来第一本微积分教科书.

在这本书中，介绍了现在被称为 L’Hôpital 法则的定理.

洛必达法则

定理

设 f, g 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0, \forall\ x \in (a,b)$. 又设

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x).$$

如果极限

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在（或为 ∞）, 则

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Proof.

补充定义 $f(a) = g(a) = 0$, 则 f 在 $[a, b)$ 上连续.

Proof.

补充定义 $f(a)=g(a)=0$, 则 f 在 $[a,b)$ 上连续.由 Cauchy 中值定理, $\forall\ x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Proof.

补充定义 $f(a) = g(a) = 0$, 则 f 在 $[a, b)$ 上连续.由 Cauchy 中值定理, $\forall\ x \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x \to a^+$ 时, $\xi \to a^+$, 从而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

Proof.

补充定义 $f(a)=g(a)=0$, 则 f 在 $[a,b)$ 上连续.由 Cauchy 中值定理, $\forall\ x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x\to a^+$ 时, $\xi\to a^+$, 从而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\to\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

因此

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\square$

注

(1) 如果仍有 $f'_{+}(a) = g'_{+}(a) = 0$, 则可利用二次导数继续求极限, 若

$$\lim_{x \to a^{+}} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

存在（或为无穷）, 则有

$$\lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

注

(1) 如果仍有 $f'_+(a) = g'_+(a) = 0$, 则可利用二次导数继续求极限, 若

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

存在（或为无穷）, 则有

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

(2) 区间 (a, b) 换成 $(-\infty, b)$ 或 (a, ∞), 有类似结论:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这可由变量代换 $x = \frac{1}{t}$ 得出.

注

(1) 如果仍有 $f'_+(a) = g'_+(a) = 0$, 则可利用二次导数继续求极限, 若

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

存在（或为无穷）, 则有

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

(2) 区间 (a, b) 换成 $(-\infty, b)$ 或 (a, ∞), 有类似结论:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这可由变量代换 $x = \frac{1}{t}$ 得出.

注

(3) 需要注意的是, 洛必达法则成立的条件是

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在（或为无穷）, 如果极限不存在, 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

未必成立.

(3) 需要注意的是, 洛必达法则成立的条件是

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在（或为无穷）, 如果极限不存在, 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

未必成立.

例如: $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$.

例子

例

求极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

例

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

解.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

∎

例

设 $f''(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2}.$$

例

设 $f''(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2}.$$

解. 由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

∎

例

设 $f''(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2}.$$

解. 由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

∎

这说明, 当 $x\to x_0$ 时,

$$f(x)-\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right]=o((x-x_0)^2).$$

定理

设 f, g 在 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0, \forall\ x \in (a, b)$. 又设

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$$

如果极限

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

存在（或为 ∞）, 则

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Proof.

我们对 I 有限的情形加以证明, $I = \infty$ 的情形可类似证明.

Proof.

我们对 l 有限的情形加以证明, $l=\infty$ 的情形可类似证明.由于

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l,$$

故任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $x\in(a,a+\eta)$ 时,

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Proof.

我们对 l 有限的情形加以证明, $l = \infty$ 的情形可类似证明.由于

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $x \in (a, a + \eta)$ 时,

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $c = a + \eta$, 当 $x \in (a, c)$ 时, 由 Cauchy 微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, c)$, 使得

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Proof.

我们对 l 有限的情形加以证明, $l = \infty$ 的情形可类似证明.由于

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $x \in (a, a+\eta)$ 时,

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $c = a + \eta$, 当 $x \in (a, c)$ 时, 由 Cauchy 微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, c)$, 使得

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

上式可以改写为

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(x) - g(c)),$$

□

续

Proof.

即

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{g(c)}{g(x)}.$$

Proof.

即

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{g(c)}{g(x)}.$$

利用条件 $g(x) \to \infty$ $(x \to a^+)$, 可证明

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon.$$

$\square$

例子

Line plots

a

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.

欢迎访问 atzjg.net