函数作图

徐海峰整理

October 28, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

作图需要注意的几个要点

在平面上作出（一元）函数的图像, 需要注意的要点是:

- 求函数 f 的定义域和值域;

在平面上作出（一元）函数的图像，需要注意的要点是:

- 求函数 f 的定义域和值域;
- 利用函数的导数，求出 f 的增减区间;

在平面上作出（一元）函数的图像, 需要注意的要点是:

- 求函数 f 的定义域和值域;
- 利用函数的导数, 求出 f 的增减区间;
- 求函数 f 的驻点和极值点;

在平面上作出（一元）函数的图像，需要注意的要点是:

- 求函数 f 的定义域和值域;
- 利用函数的导数，求出 f 的增减区间;
- 求函数 f 的驻点和极值点;
- 求函数的凹凸区间;

在平面上作出（一元）函数的图像, 需要注意的要点是:

- 求函数 f 的定义域和值域;
- 利用函数的导数, 求出 f 的增减区间;
- 求函数 f 的驻点和极值点;
- 求函数的凹凸区间;
- 特殊点处的值;

在平面上作出（一元）函数的图像, 需要注意的要点是:

- 求函数 f 的定义域和值域;
- 利用函数的导数, 求出 f 的增减区间;
- 求函数 f 的驻点和极值点;
- 求函数的凹凸区间;
- 特殊点处的值;
- 求函数 f 的拐点;

在平面上作出（一元）函数的图像, 需要注意的要点是:

- 求函数 f 的定义域和值域;
- 利用函数的导数, 求出 f 的增减区间;
- 求函数 f 的驻点和极值点;
- 求函数的凹凸区间;
- 特殊点处的值;
- 求函数 f 的拐点;
- 求函数 f 的渐近线.

拐点

定义

如果函数 f 在 x_0 的一侧是凸的, 而在另一侧是凹的, 则称 x_0 为 f 的**拐点**.

注

拐点是曲线凹凸性的过渡点或分界点.

渐近线

定义

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, 则称 $x=x_0$ 为 f **的垂直渐近线**; 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, 则称 $y=ax+b$ 为 f 在**无穷远处的渐近线**.

定义

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, 则称 $x=x_0$ 为 f 的**垂直渐近线**; 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, 则称 $y=ax+b$ 为 f 在**无穷远处的渐近线**.

注

有的书上, 对于 $a=0$ 时, 称为 f 的**水平渐近线**; 当 $a\neq 0$ 时, 称为 f 的**斜渐近线**.

例子

例

画出函数 $f(x) = x^3$ 的图像.

例

画出函数 $f(x) = x^3$ 的图像.

解. 函数 $f(x) = x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

例

画出函数 $f(x)=x^3$ 的图像.

解. 函数 $f(x)=x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.求导, $f'(x)=3x^2\geqslant 0$. 利用微分中值定理容易证明 f 严格单调递增.

例

画出函数 $f(x)=x^3$ 的图像.

解. 函数 $f(x)=x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.求导, $f'(x)=3x^2\geqslant 0$. 利用微分中值定理容易证明 f 严格单调递增.

$f''(x)=6x$, 因此 f 在 $(-\infty,0)$ 上是凹的,

例

画出函数 $f(x) = x^3$ 的图像.

解. 函数 $f(x) = x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.求导, $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$. 利用微分中值定理容易证明 f 严格单调递增.

$f''(x) = 6x$, 因此 f 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的,在 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

例

画出函数 $f(x) = x^3$ 的图像.

解. 函数 $f(x) = x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.求导, $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$. 利用微分中值定理容易证明 f 严格单调递增.

$f''(x) = 6x$, 因此 f 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的,在 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

f 是奇函数.

例

画出函数 $f(x) = x^3$ 的图像.

解. 函数 $f(x) = x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.求导, $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$. 利用微分中值定理容易证明 f 严格单调递增.

$f''(x) = 6x$, 因此 f 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的,在 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

f 是奇函数.当 $x \to +\infty$ 时, $f(x) \to +\infty$. 从而当 $x \to -\infty$ 时, $f(x) \to -\infty$.

例

画出函数 $f(x) = x^3$ 的图像.

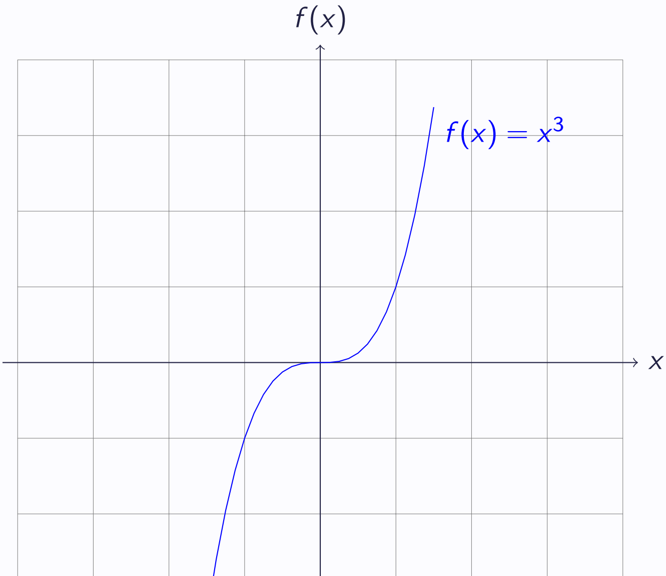
解. 函数 $f(x) = x^3$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.求导, $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$. 利用微分中值定理容易证明 f 严格单调递增.

$f''(x) = 6x$, 因此 f 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的,在 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

f 是奇函数.当 $x \to +\infty$ 时, $f(x) \to +\infty$. 从而当 $x \to -\infty$ 时, $f(x) \to -\infty$.

由此, 可以手绘 f 的大致图像. ∎

$y = x^3$



例

画出函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

例

画出函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

解. f 的定义域为 $(0, +\infty)$.

例

画出函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

解. f 的定义域为 $(0, +\infty)$.求导:

例

画出函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

解. f 的定义域为 $(0, +\infty)$.求导:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0, \quad f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} > 0,$$

例

画出函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

解. f 的定义域为 $(0,+\infty)$.求导:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}<0,\quad f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}>0,$$

因此 f 是严格单调递减的凸函数.

例

画出函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

解. f 的定义域为 $(0, +\infty)$.求导:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0, \quad f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} > 0,$$

因此 f 是严格单调递减的凸函数.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, 故 $x = 0$ 是 f 的垂直渐近线;

例

画出函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的图像.

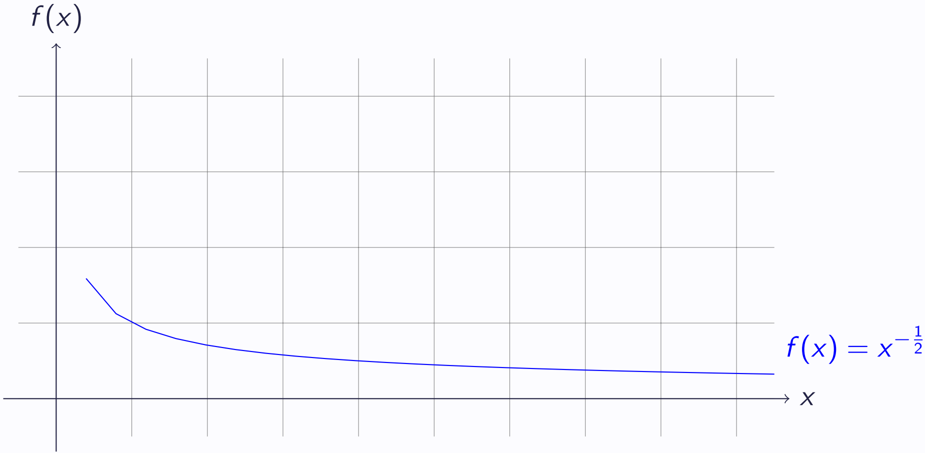
解. f 的定义域为 $(0,+\infty)$.求导:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}<0,\quad f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}>0,$$

因此 f 是严格单调递减的凸函数.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, 故 $x=0$ 是 f 的垂直渐近线;同理, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 故 $y=0$ 是 f 的水平渐近线. ∎

$y = x^{-\frac{1}{2}}$



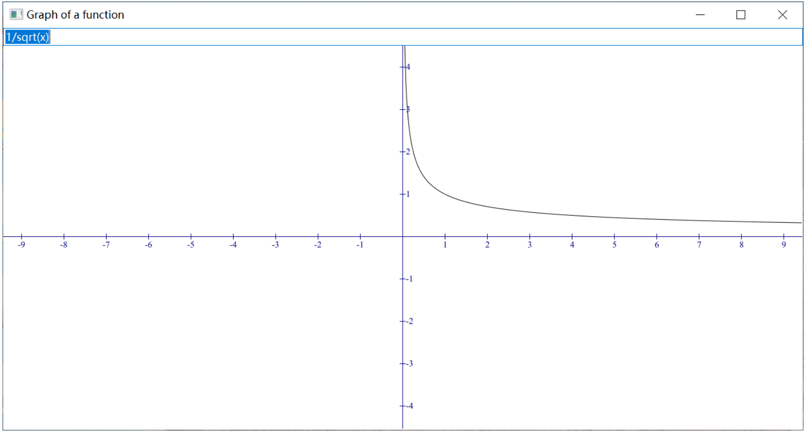


Figure 1: $1/\sqrt{x}$

例

函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的图像.

例

函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的图像.

解. 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$. f 是一个偶函数.

例

函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的图像.

解. 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$. f 是一个偶函数.求导:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},$$

例

函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的图像.

解. 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$. f 是一个偶函数.求导:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 为 f 的驻点.

例

函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的图像.

解. 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$. f 是一个偶函数.求导:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 为 f 的驻点.当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$. 即 f 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递减, 在 $(-\infty, 0]$ 上严格单调递增.

例

函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的图像.

解. 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$. f 是一个偶函数.求导:

$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad f''(x)=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 为 f 的驻点.当 $x>0$ 时, $f'(x)<0$. 即 f 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递减, 在 $(-\infty,0]$ 上严格单调递增.

$$f''(x)\begin{cases}>0, & |x|>\frac{1}{\sqrt{3}},\\ =0, & x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\\ <0, & |x|<\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

例

函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的图像.

解. 函数 f 的定义域为 $\mathbb{R}$. f 是一个偶函数.求导:

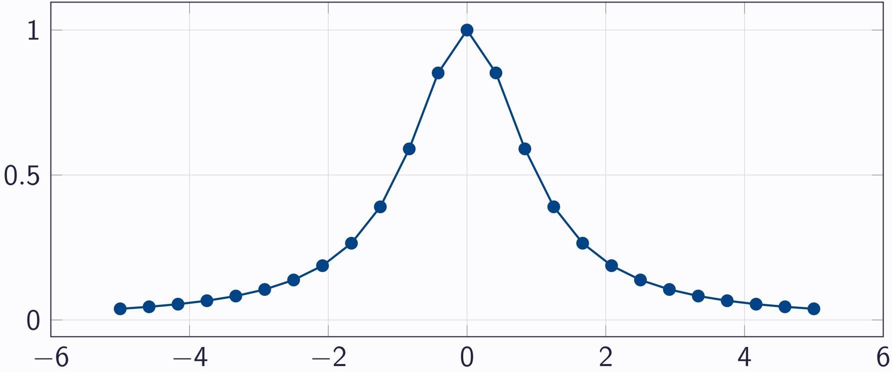
$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad f''(x)=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 为 f 的驻点.当 $x>0$ 时, $f'(x)<0$. 即 f 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递减, 在 $(-\infty,0]$ 上严格单调递增.

$$f''(x)\begin{cases} >0, & |x|>\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ =0, & x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ <0, & |x|<\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

因此, f 的凹区间为 $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$; 凸区间为 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 为 f 的拐点. ∎

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



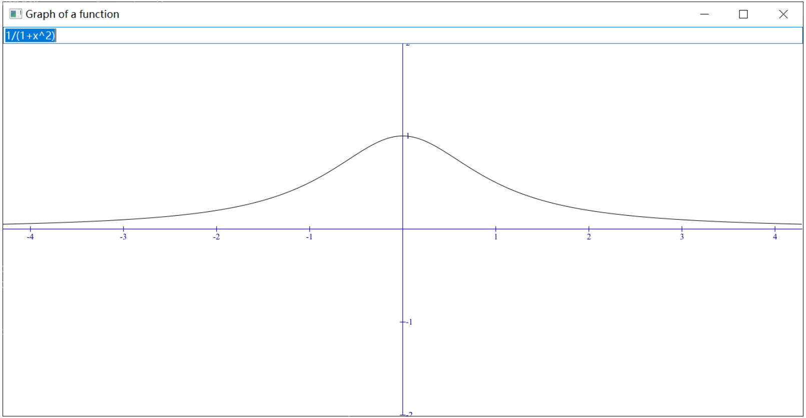
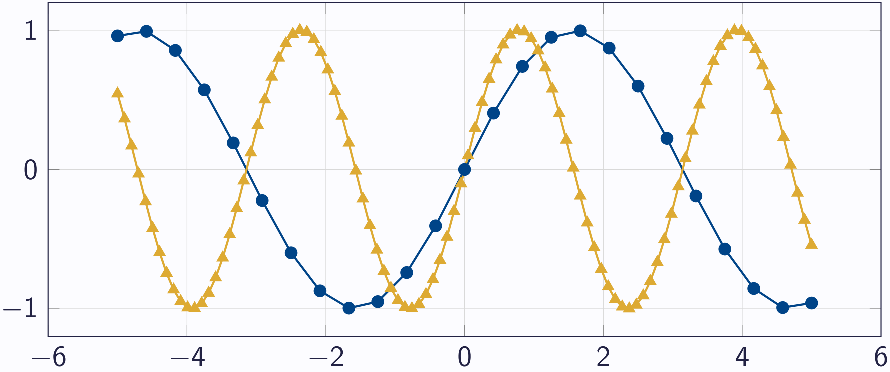


Figure 2: $1/(1+x^2)$

Line plots



Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.