微分中值定理

徐海峰整理

November 5, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

函数的极值

定义 (极值点)

设 f 是定义在区间 I 上的函数, $x_0 \in I$. 若存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

则称 x_0 为 f 在 I 上的**一个极小值点**, $f(x_0)$ 称为**极小值**.

定义 (极值点)

设 f 是定义在区间 I 上的函数, $x_0 \in I$. 若存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

则称 x_0 为 f 在 I 上的**一个极小值点**, $f(x_0)$ 称为**极小值**.

定义 (极值点)

设 f 是定义在区间 I 上的函数, $x_0 \in I$. 若存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) \leqslant f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

则称 x_0 为 f 在 I 上的**一个极大值点**, $f(x_0)$ 称为**极大值**.

Fermat 引理

定理

设 x_0 是函数 f 在 I 上的极值点, 且 x_0 为 I 的内点. 若 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

定理

设 x_0 是函数 f 在 I 上的极值点, 且 x_0 为 I 的内点. 若 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

Proof.

不妨设 x_0 为 f 的极小值点(不然可考虑 $-f$).

定理

设 x_0 是函数 f 在 I 上的极值点, 且 x_0 为 I 的内点. 若 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

Proof.

不妨设 x_0 为 f 的极小值点(不然可考虑 $-f$).由于 x_0 为 I 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$.

定理

设 x_0 是函数 f 在 I 上的极值点, 且 x_0 为 I 的内点. 若 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

Proof.

不妨设 x_0 为 f 的极小值点(不然可考虑 $-f$).由于 x_0 为 I 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$.当 x_0 为 f 的极小值点时, 我们假设 δ 充分小, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

定理

设 x_0 是函数 f 在 I 上的极值点, 且 x_0 为 I 的内点. 若 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

Proof.

不妨设 x_0 为 f 的极小值点(不然可考虑 $-f$).由于 x_0 为 I 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$.当 x_0 为 f 的极小值点时, 我们假设 δ 充分小, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

特别地, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

□

Proof.

而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

续

Proof.

而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

这说明 $f'(x_0) = 0$. □

备注

- 若 x_0 不是 I 的内点, 则即使 f 在 x_0 处可导(存在左导数或右导数), 导数也不必为零.

备注

- 若 x_0 不是 I 的内点, 则即使 f 在 x_0 处可导(存在左导数或右导数), 导数也不必为零.如 $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$.

备注

- 若 x_0 不是 I 的内点, 则即使 f 在 x_0 处可导(存在左导数或右导数), 导数也不必为零.如 $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$.
- 函数可能在不可导点处取极值, 例如 $f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1]$.

备注

- 若 x_0 不是 I 的内点, 则即使 f 在 x_0 处可导(存在左导数或右导数), 导数也不必为零.如 $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.
- 函数可能在不可导点处取极值, 例如 $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$.
- 我们把满足条件 $f'(x_0) = 0$ 的点称为 f 的**驻点**或**临界点**.

备注

- 若 x_0 不是 I 的内点, 则即使 f 在 x_0 处可导(存在左导数或右导数), 导数也不必为零.如 $f(x) = x,\ x \in [0,1]$.
- 函数可能在不可导点处取极值, 例如 $f(x) = |x|,\ x \in [-1,1]$.
- 我们把满足条件 $f'(x_0) = 0$ 的点称为 f 的**驻点**或**临界点**.需要注意的是, 驻点不必为极值点, 例 $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$. $x_0 = 0$ 是 f 的驻点, 但不是极值点.

备注

- 若 x_0 不是 I 的内点, 则即使 f 在 x_0 处可导(存在左导数或右导数), 导数也不必为零.如 $f(x)=x,\ x\in[0,1]$.
- 函数可能在不可导点处取极值, 例如 $f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$.
- 我们把满足条件 $f'(x_0)=0$ 的点称为 f 的**驻点**或**临界点**.需要注意的是, 驻点不必为极值点, 例 $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$. $x_0=0$ 是 f 的驻点, 但不是极值点.

从证明可得

命题

如果 x_0 为 f 在 I 上的极值点, 但不是 I 的内点, 则

- 当 x_0 是 I 的左端点, 如果 x_0 为 f 的极小（大）值点, 则 $f'_+(x_0)\geqslant 0(\leqslant 0)$;
- 当 x_0 是 I 的右端点, 如果 x_0 为 f 的极小（大）值点, 则 $f'_-(x_0)\leqslant 0(\geqslant 0)$;

达布(Darboux)定理

定理

设 f 为 $[a, b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

定理

设 f 为 $[a,b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

Proof.

设 k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数.

定理

设 f 为 $[a,b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

Proof.

设 k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数.考虑函数 $g(x)=f(x)-kx$, 则

$$g'_+(a)\cdot g'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)\leqslant 0,$$

定理

设 f 为 $[a, b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

Proof.

设 k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数.考虑函数 $g(x) = f(x) - kx$, 则

$$g'_+(a) \cdot g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leqslant 0,$$

如果上式为零, 则 k 等于 f 在 a 或 b 处的导数;

定理

设 f 为 $[a, b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

Proof.

设 k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数.考虑函数 $g(x) = f(x) - kx$, 则

$$g'_+(a) \cdot g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leqslant 0,$$

如果上式为零, 则 k 等于 f 在 a 或 b 处的导数;如果上式小于零, 不妨设 $g'_+(a) > 0$, $g'_-(b) < 0$, 则 g 在 a 或 b 处取不到最大值, 从而 g 在 $[a, b]$ 的内部某一点 ξ 处取到最大值.

定理

设 f 为 $[a, b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

Proof.

设 k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数.考虑函数 $g(x) = f(x) - kx$, 则

$$g'_+(a) \cdot g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leqslant 0,$$

如果上式为零, 则 k 等于 f 在 a 或 b 处的导数;如果上式小于零, 不妨设 $g'_+(a) > 0$, $g'_-(b) < 0$, 则 g 在 a 或 b 处取不到最大值, 从而 g 在 $[a, b]$ 的内部某一点 ξ 处取到最大值.由 Fermat 定理, $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = k$. □

定理

设 f 为 $[a, b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

Proof.

设 k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数.考虑函数 $g(x) = f(x) - kx$, 则

$$g'_+(a) \cdot g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leqslant 0,$$

如果上式为零, 则 k 等于 f 在 a 或 b 处的导数;如果上式小于零, 不妨设 $g'_+(a) > 0$, $g'_-(b) < 0$, 则 g 在 a 或 b 处取不到最大值, 从而 g 在 $[a, b]$ 的内部某一点 ξ 处取到最大值.由 Fermat 定理, $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = k$. □

注

此定理说明, 若 f 是区间 I 上的可导函数, 则其导函数 f' 的值域仍为区间.

定理

设 f 为 $[a,b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

Proof.

设 k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的数.考虑函数 $g(x)=f(x)-kx$, 则

$$g'_+(a)\cdot g'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)\leqslant 0,$$

如果上式为零, 则 k 等于 f 在 a 或 b 处的导数;如果上式小于零, 不妨设 $g'_+(a)>0$, $g'_-(b)<0$, 则 g 在 a 或 b 处取不到最大值, 从而 g 在 $[a,b]$ 的内部某一点 ξ 处取到最大值.由 Fermat 定理, $g'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=k$. $\square$

注

此定理说明, 若 f 是区间 I 上的可导函数, 则其导函数 f' 的值域仍为区间.特别地, 对于 Dirichlet 函数 $\phi(x)$, 不存在函数 $F(x)$, 使得 $F'(x)=\phi(x)$.

命题

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

命题

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

Proof.

不妨设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

命题

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

Proof.

不妨设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.由极限的定义, 存在 $M>0$, 使得当 $|x|\geqslant M$ 时, $f(x)>f(0)$.

命题

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

Proof.

不妨设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.由极限的定义, 存在 $M>0$, 使得当 $|x|\geqslant M$ 时, $f(x)>f(0)$.因为 f 为连续函数, 故在闭区间 $[-M,M]$ 上取到最小值.

命题

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

Proof.

不妨设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.由极限的定义, 存在 $M>0$, 使得当 $|x|\geqslant M$ 时, $f(x)>f(0)$.因为 f 为连续函数, 故在闭区间 $[-M,M]$ 上取到最小值.设 f 在 x_0 处取到此最小值, 则 $f(x_0)\leqslant f(0)$(因为 $0\in[-M,M]$).

命题

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

Proof.

不妨设 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.由极限的定义, 存在 $M>0$, 使得当 $|x|\geqslant M$ 时, $f(x)>f(0)$.因为 f 为连续函数, 故在闭区间 $[-M,M]$ 上取到最小值.设 f 在 x_0 处取到此最小值, 则 $f(x_0)\leqslant f(0)$(因为 $0\in[-M,M]$).另一方面

$$f(x_0)\leqslant f(0)<f(x),\quad \forall\ x\in(-\infty,-M)\cup(M,+\infty),$$

命题

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty),$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上达到最小（大）值.

Proof.

不妨设 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.由极限的定义, 存在 $M>0$, 使得当 $|x|\geqslant M$ 时, $f(x)>f(0)$.因为 f 为连续函数, 故在闭区间 $[-M,M]$ 上取到最小值.设 f 在 x_0 处取到此最小值, 则 $f(x_0)\leqslant f(0)$(因为 $0\in[-M,M]$).另一方面

$$f(x_0)\leqslant f(0)<f(x),\quad \forall\, x\in(-\infty,-M)\cup(M,+\infty),$$

这说明 x_0 也是 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值点. □

微分中值定理

Rolle中值定理

定理

设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

Rolle中值定理

定理

设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

Proof.

$f \in C([a, b])$, 故在 $[a, b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

定理

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

Proof.

$f\in C([a,b])$, 故在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

若 $M=m$, 则 f 恒为常数, 从而 $f'\equiv 0$;

Rolle中值定理

定理

设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

Proof.

$f \in C([a, b])$, 故在 $[a, b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

若 $M = m$, 则 f 恒为常数, 从而 $f' \equiv 0$;

若 $M > m$, 则由 $f(a) = f(b)$ 知 m 和 M 之一必由 f 在 (a, b) 内某点 ξ 处取得, 由 Fermat 定理, $f'(\xi) = 0$. $\square$

Lagrange中值定理

定理

设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{或} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Lagrange中值定理

定理

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad \text{或} \quad f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Proof.

令

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],$$

Lagrange中值定理

定理

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad \text{或}\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Proof.

令

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],$$

则 $F(a)=F(b)=0$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微,

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

定理

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad 或 \quad f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Proof.

令

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

从而满足 Rolle 定理的条件, 故存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. □

Cauchy中值定理

定理

设函数 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Cauchy中值定理

定理

设函数 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Proof.

由 Rolle 定理及 $g' \neq 0$ 知 $g(b) \neq g(a)$.

Cauchy中值定理

定理

设函数 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Proof.

由 Rolle 定理及 $g' \neq 0$ 知 $g(b) \neq g(a)$.令

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))\right],$$

Cauchy中值定理

定理

设函数 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Proof.

由 Rolle 定理及 $g' \neq 0$ 知 $g(b) \neq g(a)$.令

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right],$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, $\square$

Proof.

且

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

续

Proof.

且

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

从而满足 Rolle 定理的条件, 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. □

续

Proof.

且

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

从而满足 Rolle 定理的条件, 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. □

注

令 $g(x) = x$, 则 Cauchy 定理可以推出 Lagrange 定理.

Proof.

且

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

从而满足 Rolle 定理的条件, 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. $\square$

注

令 $g(x) = x$, 则 Cauchy 定理可以推出 Lagrange 定理.以上三个定理均称为**微分中值定理或微分中值公式**.

微分中值定理的应用

例

证明 $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

例

证明 $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|, \forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

Proof.

任取 $x, y \in \mathbb{R}$, 不妨设 $x < y(x = y$ 时所证不等式显然成立).

例

证明 $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Proof.

任取 $x, y \in \mathbb{R}$, 不妨设 $x < y(x = y$ 时所证不等式显然成立).$\sin(x)$ 是 $[x, y]$ 上的连续函数, 在 (x, y) 内可微, 满足 Lagrange 定理. 故存在 $\xi \in (x, y)$, 使得

$$|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x-y| \leqslant |x-y|.$$

□

例

证明 $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Proof.

任取 $x, y \in \mathbb{R}$, 不妨设 $x < y(x = y$ 时所证不等式显然成立).$\sin(x)$ 是 $[x, y]$ 上的连续函数, 在 (x, y) 内可微, 满足 Lagrange 定理. 故存在 $\xi \in (x, y)$, 使得

$$|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x-y| \leqslant |x-y|.$$

□

注

从这个例子的证法可以知道, 若 f' 为有界函数, 则 f 是 Lipschitz 函数.

例

证明 $e^x \geqslant 1 + x, \forall\ x \in \mathbb{R}$, 且等号成立当且仅当在 $x = 0$ 处成立.

例

证明 $e^x \geqslant 1+x, \forall\, x \in \mathbb{R}$, 且等号成立当且仅当在 $x=0$ 处成立.

Proof.

对函数 e^x 在区间 $[x,0]$(或 $[0,x]$, 这里 $x \neq 0$)上应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x,0)$(或$(0,x)$), 使得

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^{\xi}(x-0).$$

例

证明 $e^x \geqslant 1 + x, \forall\ x \in \mathbb{R}$, 且等号成立当且仅当在 $x = 0$ 处成立.

Proof.

对函数 e^x 在区间 $[x, 0]$(或 $[0, x]$, 这里 $x \neq 0$)上应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x, 0)$(或$(0, x)$), 使得

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^\xi (x - 0).$$

若将 ξ 改写为 θx, $\theta \in (0, 1)$, 则上面可以简写为:

例

证明 $e^x \geqslant 1 + x, \forall\, x \in \mathbb{R}$, 且等号成立当且仅当在 $x = 0$ 处成立.

Proof.

对函数 e^x 在区间 $[x, 0]$(或 $[0, x]$, 这里 $x \neq 0$)上应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x, 0)$(或$(0, x)$), 使得

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^\xi (x - 0).$$

若将 ξ 改写为 θx, $\theta \in (0, 1)$, 则上面可以简写为:

对函数 e^x 应用 Lagrange 中值定理, 可得

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^{\theta x}(x - 0), \quad \theta \in (0, 1).$$

例

证明 $e^x \geqslant 1 + x, \forall\, x \in \mathbb{R}$, 且等号成立当且仅当在 $x = 0$ 处成立.

Proof.

对函数 e^x 在区间 $[x, 0]$(或 $[0, x]$, 这里 $x \neq 0$)上应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x, 0)$(或$(0, x)$), 使得

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^{\xi}(x - 0).$$

若将 ξ 改写为 θx, $\theta \in (0, 1)$, 则上面可以简写为:

对函数 e^x 应用 Lagrange 中值定理, 可得

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^{\theta x}(x - 0), \quad \theta \in (0, 1).$$

当 $x > 0$ 时, $e^{\theta x} > 1$; 当 $x < 0$ 时, $e^{\theta x} < 1$; 总之, $x \neq 0$ 时均有 $e^x - 1 > x$. □

由 $e^x \geqslant 1 + x$ 可推出 AG 不等式

设 $a_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 记

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ (\text{算术平均}), \quad G = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \ (\text{几何平均}).$$

由 $e^x \geqslant 1 + x$ 可推出 AG 不等式

设 $a_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 记

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (算术平均)}, \quad G = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \text{ (几何平均)}.$$

利用 $e^x \geqslant 1 + x$ 可得

$$\frac{A}{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\ln \frac{a_i}{G}} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 + \ln \frac{a_i}{G}) = 1.$$

由 $e^x \geqslant 1+x$ 可推出 AG 不等式

设 $a_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 记

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (算术平均)}, \quad G = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \text{ (几何平均)}.$$

利用 $e^x \geqslant 1+x$ 可得

$$\frac{A}{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\ln\frac{a_i}{G}} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\ln\frac{a_i}{G}) = 1.$$

即 $A \geqslant G$, 等号成立当且仅当 $a_i \equiv G$. 这是经典的**算术——几何平均值不等式**.

例

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导. 如果 $f(a) = f(b) = 0$, 则对任意 $c \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(c) = \frac{f''(\xi)}{2}(c - a)(c - b).$$

例

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导. 如果 $f(a) = f(b) = 0$, 则对任意 $c \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(c) = \frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

[分析], 在应用微分中值定理的时候, 通常是存在 ξ, 使得 $f'(\xi) = \cdots$. 因此, 首先从所证式子出发, 考虑其各种变形, 方便使用微分中值定理.

例

设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导. 如果 $f(a)=f(b)=0$, 则对任意 $c\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

[分析], 在应用微分中值定理的时候, 通常是存在 ξ, 使得 $f'(\xi)=\cdots$. 因此, 首先从所证式子出发, 考虑其各种变形, 方便使用微分中值定理.

Proof.

不妨设 $c\in(a,b)$, 令

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b),\quad x\in[a,b].$$

例

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导. 如果 $f(a) = f(b) = 0$, 则对任意 $c \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(c) = \frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

[分析], 在应用微分中值定理的时候, 通常是存在 ξ, 使得 $f'(\xi) = \cdots$. 因此, 首先从所证式子出发, 考虑其各种变形, 方便使用微分中值定理.

Proof.

不妨设 $c \in (a, b)$, 令

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b), \quad x \in [a, b].$$

则 $F(a) = F(c) = F(b) = 0$, □

续

Proof.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(2x - (a+b)).$$

续

Proof.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(2x - (a+b)).$$

$F(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上都满足 Rolle 中值定理的条件.

续

Proof.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(2x - (a+b)).$$

$F(x)$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上都满足 Rolle 中值定理的条件.于是存在 $\xi_1 \in (a, c)$, $\xi_2 \in (c, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = 0, \quad F'(\xi_2) = 0.$$

Proof.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(2x-(a+b)).$$

$F(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都满足 Rolle 中值定理的条件.于是存在 $\xi_1 \in (a,c)$, $\xi_2 \in (c,b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = 0, \quad F'(\xi_2) = 0.$$

因为 $F'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上可微,

$$F''(x) = f''(x) - \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

再一次应用 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得

$$F''(\xi) = 0.$$

Proof.

即

$$f''(\xi) = \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

$\square$

Proof.

即

$$f''(\xi) = \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

$\square$

注

这个例子可以推广到一般情形.

Proof.

即

$$f''(\xi) = \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

□

注

这个例子可以推广到一般情形.

命题

设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内 n 阶可导, 且 $f(x)=0$ 有 n 个不同的解 $\{x_i\}_{i=1}^n$, 则对任意 $c \in [a,b]$, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(c) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^{n} (c - x_i). \tag{**}$$

证明的方法仍是构造合适的辅助函数并利用微分中值定理.

证明的方法仍是构造合适的辅助函数并利用微分中值定理.

Proof.

不妨设 $c \neq x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 令

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{\prod_{i=1}^{n}(c - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \quad x \in [a, b].$$

证明的方法仍是构造合适的辅助函数并利用微分中值定理.

Proof.

不妨设 $c \neq x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 令

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{\prod_{i=1}^{n}(c - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \quad x \in [a, b].$$

则 $F(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点: $c, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

证明的方法仍是构造合适的辅助函数并利用微分中值定理.

Proof.

不妨设 $c \neq x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 令

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{\prod_{i=1}^{n}(c - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \quad x \in [a, b].$$

则 $F(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点: $c, x_1, x_2, \ldots, x_n$.对 F 在各小区间上反复使用 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F^{(n)}(\xi) = 0$.

证明的方法仍是构造合适的辅助函数并利用微分中值定理.

Proof.

不妨设 $c \neq x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 令

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{\prod_{i=1}^{n}(c - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \quad x \in [a, b].$$

则 $F(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点: $c, x_1, x_2, \ldots, x_n$.对 F 在各小区间上反复使用 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F^{(n)}(\xi) = 0$.再利用 n 次多项式 $\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ 的 n 阶导数为 $n!$ 即可得到欲证等式. $\square$

如果 f 是任给的 n 阶可导函数, 设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 $[a,b]$ 上 n 个不同的点, 令

$$p_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big]f(x_i),$$

如果 f 是任给的 n 阶可导函数, 设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 $[a,b]$ 上 n 个不同的点, 令

$$p_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big]f(x_i),$$

则 p_{n-1} 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 它与函数 f 在 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 处取相同的值, 称为 f 的 **Lagrange 插值多项式**.

如果 f 是任给的 n 阶可导函数, 设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 $[a,b]$ 上 n 个不同的点, 令

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Big] f(x_i),$$

则 p_{n-1} 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 它与函数 f 在 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 处取相同的值, 称为 f 的 **Lagrange 插值多项式**.

解释:

如果 f 是任给的 n 阶可导函数, 设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 $[a,b]$ 上 n 个不同的点, 令

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \Big] f(x_i),$$

则 p_{n-1} 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 它与函数 f 在 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 处取相同的值, 称为 f 的 **Lagrange 插值多项式**.

解释:

$$p_{n-1}(x) = \prod_{j\neq 1} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} f(x_1) + \prod_{j\neq 2} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} f(x_2) + \cdots + \prod_{j\neq n} \frac{x-x_j}{x_n-x_j} f(x_n)$$

如果 f 是任给的 n 阶可导函数, 设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 $[a,b]$ 上 n 个不同的点, 令

$$p_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big]f(x_i),$$

则 p_{n-1} 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 它与函数 f 在 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 处取相同的值, 称为 f 的 **Lagrange 插值多项式**.

解释:

$$p_{n-1}(x)=\prod_{j\neq 1}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}f(x_1)+\prod_{j\neq 2}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}f(x_2)+\cdots+\prod_{j\neq n}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}f(x_n)$$

因此, 当 $x=x_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 时, 上式右端只有第 k 项可能非零, 且

$$p_{n-1}(x_k)=\prod_{j\neq k}\frac{x_k-x_j}{x_k-x_j}f(x_1)=f(x_1).$$

续

由于 $f - p_{n-1}$ 有 n 个不同的零点, 由 $(**)$ 可得(注意 p_{n-1} 的 n 阶导数为零)

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

由于 $f - p_{n-1}$ 有 n 个不同的零点, 由 $(**)$ 可得(注意 p_{n-1} 的 n 阶导数为零)

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

这个等式称为**插值多项式的余项公式**. 可用于估计积分近似值的误差.

使用Sowya生成Lagrange插值多项式

求经过 $(1,1)$, $(4,2)$, $(9,3)$ 这三个点的 Lagrange 插值多项式. (可用于求 $\sqrt{x}$ 在某点的近似值.)

使用Sowya生成Lagrange插值多项式

求经过 $(1,1)$, $(4,2)$, $(9,3)$ 这三个点的 Lagrange 插值多项式. (可用于求 $\sqrt{x}$ 在某点的近似值.)

```
>> LagrangePolyn(1,1;4,2;9,3)
The points are:
(1,1) (4,2) (9,3)
----------------
ell_0 = (x-(4))/(1-(4))*(x-(9))/(1-(9))
      = ((x-4)*(x-9))|24
      = 1|24x^2-13|24x^1+3|2

ell_1 = (x-(1))/(4-(1))*(x-(9))/(4-(9))
      = (-(x-1)*(x-9))|15
      = -1|15x^2+2|3x^1-3|5
```

续

```
ell_2 = (x-(1))/(9-(1))*(x-(4))/(9-(4))
      = (x-1)*(x-4)|40
      = 1|40x^2-1|8x^1+1|10

Lagrange polyn is:
        (1)*(1|24x^2-13|24x^1+3|2)+(2)*(-1|15x^2+2|3x^1-3|5)+(3)*(1|40x
    ^2-1|8x^1+1|10)
      = -1|60x^2+5|12x^1+3|5



------------------------
```

续

现在求 $\sqrt{x}$ 在 $x = 1.5$ 处的近似值.

续

现在求 $\sqrt{x}$ 在 $x = 1.5$ 处的近似值.

```
>> x=1.5

>>  -1|60*x^2+5|12*x^1+3|5
in> -1|60*1.5^2+5|12*1.5^1+3|5

out> 1.1874999975
------------------------

>> sqrt(1.5)
out> 1.22474487

------------------------
```

续

现在求 $\sqrt{x}$ 在 $x = 1.5$ 处的近似值.

```
>> x=1.5

>>  -1|60*x^2+5|12*x^1+3|5
in> -1|60*1.5^2+5|12*1.5^1+3|5

out> 1.1874999975
------------------------

>> sqrt(1.5)
out> 1.22474487

------------------------
```

说明用二次多项式误差还是较大的.

习题

习题

证明多项式 $x^3 - 3x + c$ 在 $[0, 1]$ 上不存在两个不同的实根.

习题

习题

证明多项式 $x^3 - 3x + c$ 在 $[0,1]$ 上不存在两个不同的实根.

习题

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = 2f(\xi)$.