几类积分之间的联系

徐海峰整理

July 2, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

Newton-Leibniz公式

Newton-Leibniz公式是微积分的一个核心定理.

Newton-Leibniz公式是微积分的一个核心定理.对于一元函数来说, Newton-Leibniz公式有两种表现形式:

Newton-Leibniz公式是微积分的一个核心定理.对于一元函数来说, Newton-Leibniz公式有两种表现形式:

- 如果 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数, 且
$$F'(x)=f(x),\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x);$$

Newton-Leibniz公式是微积分的一个核心定理.对于一元函数来说, Newton-Leibniz公式有两种表现形式:

- 如果 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数, 且

$$F'(x)=f(x), \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x);$$

- 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a), \quad 或 \quad \int_a^b \mathrm{d}f=f\Big|_a^b.$$

Newton-Leibniz公式是微积分的一个核心定理.对于一元函数来说, Newton-Leibniz公式有两种表现形式:

- 如果 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数, 且
$$F'(x)=f(x),\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x);$$
- 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 则
$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a),\quad \text{或}\quad \int_a^b \mathrm{d}f=f\Big|_a^b.$$

我们现在想把这些公式推广到多元函数.

Newton-Leibniz公式是微积分的一个核心定理.对于一元函数来说, Newton-Leibniz公式有两种表现形式:

- 如果 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数, 且

$$F'(x)=f(x),\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x);$$

- 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a),\quad \text{或}\quad \int_a^b \mathrm{d}f=f\Big|_a^b.$$

我们现在想把这些公式推广到多元函数.这一节仅考虑几个特殊情形, 一般的情形将在下一章中讨论.

余面积公式

设 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$.

设 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$.取区间 $[a,b] \subset f(\mathbb{R}^n)$, 则当 $t \in [a,b]$ 时, $f^{-1}(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面.

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$.取区间 $[a, b] \subset f(\mathbb{R}^n)$, 则当 $t \in [a, b]$ 时, $f^{-1}(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面.

事实上, 任取 $x^0 \in f^{-1}(t)$, 因为 $\|\nabla f(x^0)\| \neq 0$, 不妨设 $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$.

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$.取区间 $[a,b] \subset f(\mathbb{R}^n)$, 则当 $t \in [a,b]$ 时, $f^{-1}(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面.

事实上, 任取 $x^0 \in f^{-1}(t)$, 因为 $\|\nabla f(x^0)\| \neq 0$, 不妨设 $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$.根据隐函数定理, 方程

$$f(x_1, \ldots, x_n) - t = 0 \tag{*}$$

存在 C^1 的（局部）解

$$x_n = \varphi_t(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$.取区间 $[a, b] \subset f(\mathbb{R}^n)$, 则当 $t \in [a, b]$ 时, $f^{-1}(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面.

事实上, 任取 $x^0 \in f^{-1}(t)$, 因为 $\|\nabla f(x^0)\| \neq 0$, 不妨设 $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$.根据隐函数定理, 方程

$$f(x_1, \ldots, x_n) - t = 0 \tag{*}$$

存在 C^1 的（局部）解

$$x_n = \varphi_t(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

即在 x^0 附近 $f^{-1}(t)$ 是**参数曲面**.

设 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$.取区间 $[a,b] \subset f(\mathbb{R}^n)$, 则当 $t \in [a,b]$ 时, $f^{-1}(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面.

事实上, 任取 $x^0 \in f^{-1}(t)$, 因为 $\|\nabla f(x^0)\| \neq 0$, 不妨设 $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$.根据隐函数定理, 方程

$$f(x_1,\dots,x_n) - t = 0 \tag{*}$$

存在 C^1 的（局部）解

$$x_n = \varphi_t(x_1,\dots,x_{n-1}), \quad (x_1,\dots,x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

即在 x^0 附近 $f^{-1}(t)$ 是**参数曲面**.

根据隐函数定理, 上式中的 φ_t 关于 t 也是 C^1 的.

设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且 $\|\nabla f\| \neq 0$.取区间 $[a,b] \subset f(\mathbb{R}^n)$, 则当 $t \in [a,b]$ 时, $f^{-1}(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面.

事实上, 任取 $x^0 \in f^{-1}(t)$, 因为 $\|\nabla f(x^0)\| \neq 0$, 不妨设 $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \neq 0$.根据隐函数定理, 方程

$$f(x_1, \ldots, x_n) - t = 0 \tag{*}$$

存在 C^1 的（局部）解

$$x_n = \varphi_t(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

即在 x^0 附近 $f^{-1}(t)$ 是**参数曲面**.

根据隐函数定理, 上式中的 φ_t 关于 t 也是 C^1 的.

在 $(*)$ 中对 t 求导, 得

定理

The following statement is correct

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{L} \cos\left(l\frac{2\pi}{L} + 0\right) \tag{1}$$

Elements

Typography

```
The theme provides sensible defaults to
\emph{emphasize} text, \alert{accent} parts
or show \textbf{bold} results.
```

becomes

The theme provides sensible defaults to *emphasize* text, **accent** parts or show **bold** results.

Font feature test

- Regular
- *Italic*
- Small Caps
- **Bold**
- ***Bold Italic***
- **Bold Small Caps**
- `Monospace`
- *`Monospace Italic`*
- **`Monospace Bold`**
- ***`Monospace Bold Italic`***

Lists

Items

- Milk
- Eggs
- Potatoes

Enumerations

1. First,
2. Second and
3. Last.

Descriptions

PowerPoint Meeh.

Beamer Yeeeha.

Tables

Table 1: Largest cities in the world (source: Wikipedia)

City	Population
Mexico City	20,116,842
Shanghai	19,210,000
Peking	15,796,450
Istanbul	14,160,467

Blocks

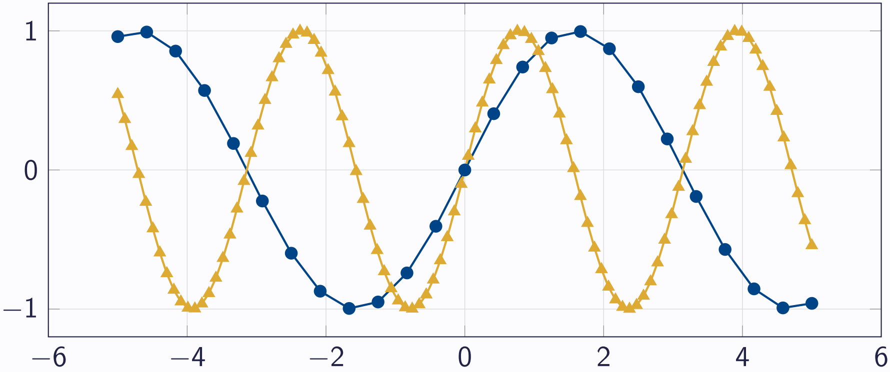
Three different block environments are pre-defined and may be styled with an optional background color.

Default	**Default**
Block content.	Block content.

Alert	**Alert**
Block content.	Block content.

Example	**Example**
Block content.	Block content.

Line plots



Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.