第二型曲面积分

徐海峰整理

September 23, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

第二型曲面积分

如同在曲线上一样, 在曲面上也存在着第二种类型的积分, 这种积分涉及曲面“方向”的概念.

如同在曲线上一样, 在曲面上也存在着第二种类型的积分, 这种积分涉及曲面“方向”的概念.

参数曲线的方向是由其参数决定的, 参数曲面也是如此.

如同在曲线上一样, 在曲面上也存在着第二种类型的积分, 这种积分涉及曲面“方向”的概念.

参数曲线的方向是由其参数决定的, 参数曲面也是如此.

设 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为参数曲面, 如果 $\psi : \Omega' \to \Omega$ 为 C^1 的可逆映射, 则 $\varphi \circ \psi$ 也是参数曲面, 它是 φ 的**重新参数化**.

如同在曲线上一样, 在曲面上也存在着第二种类型的积分, 这种积分涉及曲面“方向”的概念.

参数曲线的方向是由其参数决定的, 参数曲面也是如此.

设 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为参数曲面, 如果 $\psi : \Omega' \to \Omega$ 为 C^1 的可逆映射, 则 $\varphi \circ \psi$ 也是参数曲面, 它是 φ 的**重新参数化**.如果 $\det(J\psi)$ 恒为正, 则称 φ 和 $\varphi \circ \psi$ 是同向的; 如果 $\det(J\psi)$ 恒为负, 则称 φ 和 $\varphi \circ \psi$ 是反向的.

$\mathbb{R}^n$ 上的定向

$\mathbb{R}^n$ 上的标准直角坐标决定的定向称为**标准定向(正向)**.

$\mathbb{R}^n$ 上的标准直角坐标决定的定向称为**标准定向(正向)**.

例

可逆映射 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

的 Jacobi 行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{x_n} \\ \frac{\partial f_2}{x_1} & \frac{\partial f_2}{x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{x_1} & \frac{\partial f_n}{x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = -1\ ,$$

它决定的定向和标准定向相反.

在 $\mathbb{R}^n$ 上只有两个定向, 即如果 $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为可逆 C^1 映射, 则 ψ 要么和标准定向同向, 要么和标准定向反向.

在 $\mathbb{R}^n$ 上只有两个定向, 即如果 $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为可逆 C^1 映射, 则 ψ 要么和标准定向同向, 要么和标准定向反向.

这是因为, 如果 $\psi \in C^1$, 则 $\det J\psi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上处处非零的连续函数, 由连续函数的介值定理即知 $\det J\psi$ 要么恒正, 要么恒负.

在 $\mathbb{R}^n$ 上只有两个定向, 即如果 $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为可逆 C^1 映射, 则 ψ 要么和标准定向同向, 要么和标准定向反向.

这是因为, 如果 $\psi \in C^1$, 则 $\det J\psi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上处处非零的连续函数, 由连续函数的介值定理即知 $\det J\psi$ 要么恒正, 要么恒负.类似的结果对于连通的曲面也成立.

超曲面的定向

先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的参数曲面 $r:\Omega\to\mathbb{R}^3$, 其方程记为

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\quad (u,v)\in\Omega.$$

先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的参数曲面 $r:\Omega\to\mathbb{R}^3$, 其方程记为

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\quad (u,v)\in\Omega.$$

我们知道, 在 $r(u,v)$ 处, $r_u(x_u,y_u,z_u)$ 和 $r_v(x_v,y_v,z_v)$ 是切向量, 而

$$r_u\times r_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$$

先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的参数曲面 $r:\Omega\to\mathbb{R}^3$, 其方程记为

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\quad (u,v)\in\Omega.$$

我们知道, 在 $r(u,v)$ 处, $r_u(x_u,y_u,z_u)$ 和 $r_v(x_v,y_v,z_v)$ 是切向量, 而

$$\begin{aligned} r_u\times r_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ &= \big(y_uz_v-z_uy_v, z_ux_v-x_uz_v, x_uy_v-y_ux_v\big) \\ &= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \end{aligned}$$

是法向量.

如果 $(u, v) = \varphi(s, t)$ 是曲面的重新参数化, 即曲面方程为 $\tilde{r}(s, t) = r(\varphi(s, t))$. 为方便起见, 仍记 $\tilde{r}$ 为 r.

如果 $(u,v)=\varphi(s,t)$ 是曲面的重新参数化, 即曲面方程为 $\tilde{r}(s,t)=r(\varphi(s,t))$. 为方便起见, 仍记 $\tilde{r}$ 为 r.则

$$r_s \times r_t = (r_u \times r_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = (r_u \times r_v)\det J\varphi\,,$$

如果 $(u,v)=\varphi(s,t)$ 是曲面的重新参数化, 即曲面方程为 $\tilde{r}(s,t)=r(\varphi(s,t))$. 为方便起见, 仍记 $\tilde{r}$ 为 r.则

$$r_s\times r_t=(r_u\times r_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=(r_u\times r_v)\det J\varphi\,,$$

（习题: 验证第一个等号. 参见问题3450.）

如果 $(u, v) = \varphi(s, t)$ 是曲面的重新参数化, 即曲面方程为 $\tilde{r}(s, t) = r(\varphi(s, t))$. 为方便起见, 仍记 $\tilde{r}$ 为 r.则

$$r_s \times r_t = (r_u \times r_v)\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = (r_u \times r_v) \det J\varphi\,,$$

（习题: 验证第一个等号. 参见问题3450.）

这说明, 参数 (u, v) 和 (s, t) 同向（反向）时, 它们决定的法向量同向（反向）.

如果 $(u,v)=\varphi(s,t)$ 是曲面的重新参数化, 即曲面方程为 $\tilde{r}(s,t)=r(\varphi(s,t))$. 为方便起见, 仍记 $\tilde{r}$ 为 r.则

$$r_s\times r_t=(r_u\times r_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=(r_u\times r_v)\det J\varphi\,,$$

（习题: 验证第一个等号. 参见问题3450.）

这说明, 参数 (u,v) 和 (s,t) 同向（反向）时, 它们决定的法向量同向（反向）.因此, $\mathbb{R}^3$ **中曲面的定向**也可以用其单位法向量 $\vec{n}$ 表示, 其中

$$\vec{n}=\frac{r_u\times r_v}{\|r_u\times r_v\|}.$$

如果 $(u,v)=\varphi(s,t)$ 是曲面的重新参数化, 即曲面方程为 $\tilde{r}(s,t)=r(\varphi(s,t))$. 为方便起见, 仍记 $\tilde{r}$ 为 r.则

$$r_s \times r_t = (r_u \times r_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = (r_u \times r_v)\det J\varphi\,,$$

（习题: 验证第一个等号. 参见问题3450.）

这说明, 参数 (u,v) 和 (s,t) 同向（反向）时, 它们决定的法向量同向（反向）.因此, $\mathbb{R}^3$ 中**曲面的定向**也可以用其单位法向量 $\vec{n}$ 表示, 其中

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}.$$

同向的参数给出相同的单位法向量, 反向的参数给出相反的单位法向量.

如果 $(u, v) = \varphi(s, t)$ 是曲面的重新参数化, 即曲面方程为 $\tilde{r}(s, t) = r(\varphi(s, t))$. 为方便起见, 仍记 $\tilde{r}$ 为 r.则

$$r_s \times r_t = (r_u \times r_v)\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = (r_u \times r_v)\det J\varphi\,,$$

（习题: 验证第一个等号. 参见问题3450.）

这说明, 参数 (u, v) 和 (s, t) 同向（反向）时, 它们决定的法向量同向（反向）.因此, $\mathbb{R}^3$ **中曲面的定向**也可以用其单位法向量 $\vec{n}$ 表示, 其中

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}.$$

同向的参数给出相同的单位法向量, 反向的参数给出相反的单位法向量.

记

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

其中 α, β, γ 分别是 $\vec{n}$ 与三个坐标轴的夹角（定义为与坐标轴正向的夹角）.

记

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

其中 α, β, γ 分别是 $\vec{n}$ 与三个坐标轴的夹角（定义为与坐标轴正向的夹角）.

当 $\cos\gamma \geqslant 0$ 时, 即 $\vec{n}$ 和 z 轴的夹角不超过 $\frac{\pi}{2}$ 时, 单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的上侧方向**;

记

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

其中 α, β, γ 分别是 $\vec{n}$ 与三个坐标轴的夹角（定义为与坐标轴正向的夹角）.

当 $\cos\gamma \geqslant 0$ 时, 即 $\vec{n}$ 和 z 轴的夹角不超过 $\frac{\pi}{2}$ 时, 单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的上侧方向**;反之, 单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的下侧方向**.

记

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

其中 α, β, γ 分别是 $\vec{n}$ 与三个坐标轴的夹角（定义为与坐标轴正向的夹角）.

当 $\cos\gamma \geqslant 0$ 时, 即 $\vec{n}$ 和 z 轴的夹角不超过 $\frac{\pi}{2}$ 时, 单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的上侧方向**;反之, 单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的下侧方向**.

对于封闭的曲面, 指向曲面所围区域外部的单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的外侧方向**,

记

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

其中 α, β, γ 分别是 $\vec{n}$ 与三个坐标轴的夹角（定义为与坐标轴正向的夹角）.

当 $\cos\gamma\geqslant 0$ 时，即 $\vec{n}$ 和 z 轴的夹角不超过 $\frac{\pi}{2}$ 时，单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的上侧方向**;反之，单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的下侧方向**.

对于封闭的曲面，指向曲面所围区域外部的单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的外侧方向**,指向曲面所围区域内部的单位法向量所决定的方向称为**参数曲面的内侧方向**.

推广到高维欧氏空间中的超曲面

上面的讨论可完全类似地推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面上.

推广到高维欧氏空间中的超曲面

上面的讨论可完全类似地推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面上.设超曲面的方程为

$$r(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \big(x_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_{n-1})\big),$$

推广到高维欧氏空间中的超曲面

上面的讨论可完全类似地推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面上.设超曲面的方程为

$$r(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \big(x_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_{n-1})\big),$$

则其法向量为 $\vec{N}(u) = (N_1, \ldots, N_n)$, 其中

$$N_i(u) = (-1)^{i-1} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\ .$$

推广到高维欧氏空间中的超曲面

上面的讨论可完全类似地推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面上.设超曲面的方程为

$$r(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \big(x_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_{n-1})\big),$$

则其法向量为 $\vec{N}(u) = (N_1, \ldots, N_n)$, 其中

$$N_i(u) = (-1)^{i-1} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} .$$

如果 $u = \varphi(v)$ 为超曲面的重新参数化, 则法向量之间满足关系

$$\vec{N}(v) = \vec{N}(u) \det J\varphi ,$$

推广到高维欧氏空间中的超曲面

上面的讨论可完全类似地推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面上.设超曲面的方程为

$$r(u_1,\ldots,u_{n-1})=\big(x_1(u_1,\ldots,u_{n-1}),\ldots,x_n(u_1,\ldots,u_{n-1})\big),$$

则其法向量为 $\vec{N}(u)=(N_1,\ldots,N_n)$, 其中

$$N_i(u)=(-1)^{i-1}\frac{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_{n-1})}\ .$$

如果 $u=\varphi(v)$ 为超曲面的重新参数化, 则法向量之间满足关系

$$\vec{N}(v)=\vec{N}(u)\,\det J\varphi\ ,$$

因此同向的参数给出同向的法向量, 反向的参数给出反向的法向量.

第二型曲面积分的定义

有了参数曲面的定向, 我们可以定义第二型的曲面积分了. 为简单起见, 先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面.

第二型曲面积分的定义

有了参数曲面的定向, 我们可以定义第二型的曲面积分了. 为简单起见, 先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面.

定义 (第二型曲面积分)

设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面, 其参数表示为

$$r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big), \quad (u,v) \in \Omega.$$

有了参数曲面的定向, 我们可以定义第二型的曲面积分了. 为简单起见, 先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面.

定义 (第二型曲面积分)

设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面, 其参数表示为

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\quad (u,v)\in\Omega.$$

对于定义在 Σ 上的连续向量值函数 (P,Q,R), 定义其曲面积分为

$$I=\int_\Omega P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_\Omega Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_\Omega R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\ ,$$

第二型曲面积分的定义

有了参数曲面的定向, 我们可以定义第二型的曲面积分了. 为简单起见, 先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面.

定义 (第二型曲面积分)

设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面, 其参数表示为

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\quad (u,v)\in\Omega.$$

对于定义在 Σ 上的连续向量值函数 (P,Q,R), 定义其曲面积分为

$$I=\int_\Omega P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_\Omega Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_\Omega R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\ ,$$

也记为

$$I=\int_\Sigma P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\ .$$

注

利用前面的记号, 第二型曲面积分可以写为

$$\int_{\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\Omega} (P, Q, R) \cdot (r_u \times r_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

注

利用前面的记号, 第二型曲面积分可以写为

$$\int_{\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\Omega} (P, Q, R) \cdot (r_u \times r_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

再由第一型曲面积分的定义, 上式还可以写为

$$\int_{\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot \vec{n}\mathrm{d}\sigma,$$

即取定了方向后第二型曲面积分可以转化为第一型曲面积分.

注

需要注意的是, (P, Q, R) 的第二型曲面积分在两个同向的参数下其值不变, 在反向的两个参数下其值正好相差一个负号.

注

需要注意的是, (P, Q, R) 的第二型曲面积分在两个同向的参数下其值不变, 在反向的两个参数下其值正好相差一个负号.即, 用 $-\Sigma$ 表示反向曲面时, 有

$$\int_{-\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\int_{\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

注

完全类似地, $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面上的第二型曲面积分可以定义为

$$\int_\Sigma P_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_n + \cdots + P_n \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_{n-1} = \int_\Omega (P_1, \ldots, P_n) \cdot \vec{N}(u) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}.$$

注

完全类似地, $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面上的第二型曲面积分可以定义为

$$\int_{\Sigma} P_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_n + \cdots + P_n \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_{n-1} = \int_{\Omega} (P_1, \ldots, P_n) \cdot \vec{N}(u) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}.$$

对于一般的 m 维参数曲面也可以定义第二型曲面积分, 我们将在下一章中作进一步的讨论.

第二型曲面积分的物理含义

设空间中有流速为 $\vec{v} = (P, Q, R)$ 的流体, 求单位时间内通过曲面 Σ 的流体的流量.

第二型曲面积分的物理含义

设空间中有流速为 $\vec{v} = (P, Q, R)$ 的流体, 求单位时间内通过曲面 Σ 的流体的流量.

用通常的 "微元法" 计算流量如下: 任取 Σ 的一小片, 其面积记为 $\Delta\sigma$, 经过这一小片的流体速度为 $\vec{v}$, 曲面的单位法向量为 $\vec{n}$, 则单位时间内通过这一小片曲面的流体的流量为 $\vec{v} \cdot \vec{n}\Delta\sigma$.

第二型曲面积分的物理含义

设空间中有流速为 $\vec{v}=(P,Q,R)$ 的流体, 求单位时间内通过曲面 Σ 的流体的流量.

用通常的“微元法”计算流量如下: 任取 Σ 的一小片, 其面积记为 $\Delta\sigma$, 经过这一小片的流体速度为 $\vec{v}$, 曲面的单位法向量为 $\vec{n}$, 则单位时间内通过这一小片曲面的流体的流量为 $\vec{v}\cdot\vec{n}\Delta\sigma$.于是单位时间内经过 Σ 的流量为积分

$$\int_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma\ ,$$

因此求流量的问题就是曲面上的第二型曲面积分的问题.

第二型曲面积分的物理含义

设空间中有流速为 $\vec{v} = (P, Q, R)$ 的流体, 求单位时间内通过曲面 Σ 的流体的流量.

用通常的“微元法”计算流量如下: 任取 Σ 的一小片, 其面积记为 $\Delta\sigma$, 经过这一小片的流体速度为 $\vec{v}$, 曲面的单位法向量为 $\vec{n}$, 则单位时间内通过这一小片曲面的流体的流量为 $\vec{v} \cdot \vec{n}\Delta\sigma$.于是单位时间内经过 Σ 的流量为积分

$$\int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\sigma \ ,$$

因此求流量的问题就是曲面上的第二型曲面积分的问题.从这个例子也可以看出第二型曲面积分是依赖于方向的.

例子

例

计算积分

$$\int_{\Sigma} xyz \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ ,$$

其中 Σ 是四分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, 方向为外侧.

例

计算积分

$$\int_{\Sigma} xyz \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ ,$$

其中 Σ 是四分之一球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, 方向为外侧.

解. 将曲面分成两部分, 即四分之一球面的上半部分 Σ_1 和下半部分 Σ_2.

例

计算积分

$$\int_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ ,$$

其中 Σ 是四分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, 方向为外侧.

解. 将曲面分成两部分, 即四分之一球面的上半部分 Σ_1 和下半部分 Σ_2.记 $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

$$\Sigma_1: \ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in \Omega,$$

例

计算积分

$$\int_{\Sigma} xyz \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ ,$$

其中 Σ 是四分之一球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, 方向为外侧.

解. 将曲面分成两部分, 即四分之一球面的上半部分 Σ_1 和下半部分 Σ_2.记 $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

$$\Sigma_1: \ z=\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y) \in \Omega,$$

$$\Sigma_2: \ z=-\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y) \in \Omega,$$

例

计算积分

$$\int_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ ,$$

其中 Σ 是四分之一球面 $x^2+y^2+z^2=1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$, 方向为外侧.

解. 将曲面分成两部分, 即四分之一球面的上半部分 Σ_1 和下半部分 Σ_2.记 $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

$$\Sigma_1: \ z = \sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y) \in \Omega,$$

$$\Sigma_2: \ z = -\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y) \in \Omega,$$

在曲面上, 参数 (x,y) 决定的法向量为 $(-z_x,-z_y,1)$, 因此, 这个参数在 Σ_1 上决定的方向就是外侧方向, 在 Σ_2 上决定的方向是内侧方向. ∎

解. 按照定义,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \int_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \int_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \int_{\Omega} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Omega} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot \sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

∎

例

计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 方向为外侧.

例

计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 方向为外侧.

解. 取球面坐标

$$x = a + R\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y = b + R\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = c + R\cos\varphi,$$

其中 $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

例

计算积分

$$I = \int_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 方向为外侧.

解. 取球面坐标

$$x = a + R \sin\varphi \cos\theta,$$
$$y = b + R \sin\varphi \sin\theta,$$
$$z = c + R \cos\varphi,$$

其中 $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

计算表明 ∎

解.

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = R^2\sin^2\varphi\cos\theta, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = R^2\sin^2\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = R^2\cos\varphi\sin\theta,$$

解.

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = R^2\sin^2\varphi\cos\theta, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = R^2\sin^2\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = R^2\cos\varphi\sin\theta,$$

因此 (φ,θ) 决定的法向量是外侧的, 由定义, 有

∎