第一型曲面积分

徐海峰整理

July 5, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

数学部分的内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

物理部分的内容基于:

程守洙、江之水主编《普通物理学》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

第一型曲面积分

设 $m \leqslant n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.

设 $m \leqslant n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.C^1 映射 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**一个参数曲面**.

设 $m \leqslant n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.C^1 映射 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**一个参数曲面**.

我们想要定义参数曲面的面积, 先从线性映射开始.

设 $m \leqslant n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.C^1 映射 $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**一个参数曲面**.

我们想要定义参数曲面的面积, 先从线性映射开始.设 $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $I \subset \mathbb{R}^m$ 为矩形.

设 $m \leqslant n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.C^1 映射 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**一个参数曲面**.

我们想要定义参数曲面的面积, 先从线性映射开始.设 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $I \subset \mathbb{R}^m$ 为矩形.

如果 φ 是退化的（秩小于 m）, 则 $\varphi(\mathbb{R}^m)$ 包含在一个维数小于 m 的子向量空间中, 我们自然定义 $\varphi(I)$ 的 m 维体积为零;

设 $m \leqslant n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.C^1 映射 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**一个参数曲面**.

我们想要定义参数曲面的面积, 先从线性映射开始.设 $\varphi :\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $I \subset \mathbb{R}^m$ 为矩形.

如果 φ 是退化的（秩小于 m）, 则 $\varphi(\mathbb{R}^m)$ 包含在一个维数小于 m 的子向量空间中, 我们自然定义 $\varphi(I)$ 的 m 维体积为零;

如果 φ 非退化, 则 $\varphi(\mathbb{R}^m)$ 维数为 m, $\varphi(I)$ 为 m 维欧氏空间中的可求体积集, 我们来计算它的 m 维体积.

设 $m \leqslant n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.C^1 映射 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**一个参数曲面**.

我们想要定义参数曲面的面积, 先从线性映射开始.设 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $I \subset \mathbb{R}^m$ 为矩形.

如果 φ 是退化的（秩小于 m）, 则 $\varphi(\mathbb{R}^m)$ 包含在一个维数小于 m 的子向量空间中, 我们自然定义 $\varphi(I)$ 的 m 维体积为零;

如果 φ 非退化, 则 $\varphi(\mathbb{R}^m)$ 维数为 m, $\varphi(I)$ 为 m 维欧氏空间中的可求体积集, 我们来计算它的 m 维体积.

以下为了区分不同维数的体积, 我们将 m 维体积称为**面积**, 并用记号 σ 来表示它.

不妨设 $I = [0,1]^m$.

不妨设 $I=[0,1]^m$.记 $v_j=\varphi(e_j)=(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{nj})$, 其中 $\{e_j\}_{j=1}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一组标准基.

不妨设 $I=[0,1]^m$.记 $v_j=\varphi(e_j)=(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{nj})$, 其中 $\{e_j\}_{j=1}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一组标准基.则

$$\varphi(I)=\left\{\sum_{j=1}^m x_j v_j \mid 0\leqslant x_j\leqslant 1,\quad j=1,2,\dots,m\right\}.$$

不妨设 $I=[0,1]^m$.记 $v_j=\varphi(e_j)=(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{nj})$, 其中 $\{e_j\}_{j=1}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一组标准基.则

$$\varphi(I)=\left\{\sum_{j=1}^m x_jv_j \mid 0\leqslant x_j\leqslant 1,\quad j=1,2,\dots,m\right\}.$$

记 $n\times m$ 型的矩阵 $A=(a_{ij})$.

不妨设 $I=[0,1]^m$.记 $v_j=\varphi(e_j)=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj})$, 其中 $\{e_j\}_{j=1}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一组标准基.则

$$\varphi(I)=\left\{\sum_{j=1}^m x_jv_j \mid 0\leqslant x_j\leqslant 1,\quad j=1,2,\ldots,m\right\}.$$

记 $n\times m$ 型的矩阵 $A=(a_{ij})$.如果当 $i>m$ 时 $a_{ij}\equiv 0$, 即

$$\varphi(\mathbb{R}^m)\subset\mathbb{R}^m\times\{0\}=\{(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n\},$$

则 $\varphi(I)$ 的面积可表示为

$$\sigma(\varphi(I))=\left|\det(a_{ij})_{m\times m}\right|\sigma(I)=\sqrt{\det[(a_{ij})_{n\times m}^T(a_{ij})_{n\times m}]}\sigma(I).$$

不妨设 $I=[0,1]^m$.记 $v_j=\varphi(e_j)=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj})$, 其中 $\{e_j\}_{j=1}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一组标准基.则

$$\varphi(I)=\left\{\sum_{j=1}^m x_j v_j \mid 0\leqslant x_j\leqslant 1,\quad j=1,2,\ldots,m\right\}.$$

记 $n\times m$ 型的矩阵 $A=(a_{ij})$.如果当 $i>m$ 时 $a_{ij}\equiv 0$, 即

$$\varphi(\mathbb{R}^m)\subset\mathbb{R}^m\times\{0\}=\{(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n\},$$

则 $\varphi(I)$ 的面积可表示为

$$\sigma(\varphi(I))=\left|\det(a_{ij})_{m\times m}\right|\sigma(I)=\sqrt{\det[(a_{ij})_{n\times m}^T(a_{ij})_{n\times m}]}\sigma(I).$$

这里用到了正交变换保持体积不变的性质, 详见第十三章第四节的内容.

关于曲面面积定义要注意的地方

值得注意的是, 我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是 C^1 的, 这主要是要用到曲面的切平面.

关于曲面面积定义要注意的地方

值得注意的是，我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是 C^1 的，这主要是要用到曲面的切平面.

我们将曲面上无穷小区域的面积近似地看成它在切平面上的投影的面积，求和再取极限以后定义为曲面的面积.

关于曲面面积定义要注意的地方

值得注意的是，我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是 C^1 的，这主要是要用到曲面的切平面.

我们将曲面上无穷小区域的面积近似地看成它在切平面上的投影的面积，求和再取极限以后定义为曲面的面积.

这和曲线的长度的定义似乎有些不同. 曲线的长度可以用折线段的长度去逼近.

关于曲面面积定义要注意的地方

值得注意的是, 我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是 C^1 的, 这主要是要用到曲面的切平面.

我们将曲面上无穷小区域的面积近似地看成它在切平面上的投影的面积, 求和再取极限以后定义为曲面的面积.

这和曲线的长度的定义似乎有些不同. 曲线的长度可以用折线段的长度去逼近.但是不能通过在曲面上取分割, 然后用以分点为顶点的多边形（比如三角形）的面积之和去逼近曲面的面积.

关于曲面面积定义要注意的地方

值得注意的是，我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是 C^1 的，这主要是要用到曲面的切平面.

我们将曲面上无穷小区域的面积近似地看成它在切平面上的投影的面积，求和再取极限以后定义为曲面的面积.

这和曲线的长度的定义似乎有些不同. 曲线的长度可以用折线段的长度去逼近.但是不能通过在曲面上取分割，然后用以分点为顶点的多边形（比如三角形）的面积之和去逼近曲面的面积.Schwartz 曾经举过一个例子（圆柱面）说明这样的定义是行不通的.

关于曲面面积定义要注意的地方

值得注意的是，我们在定义参数曲面的面积时要求曲面是 C^1 的，这主要是要用到曲面的切平面.

我们将曲面上无穷小区域的面积近似地看成它在切平面上的投影的面积，求和再取极限以后定义为曲面的面积.

这和曲线的长度的定义似乎有些不同. 曲线的长度可以用折线段的长度去逼近.但是不能通过在曲面上取分割，然后用以分点为顶点的多边形（比如三角形）的面积之和去逼近曲面的面积.Schwartz 曾经举过一个例子（圆柱面）说明这样的定义是行不通的.

对于一般的曲面，定义面积需要引入 **Hausdorff 测度**的概念，可以参看几何测度论的著作.

第一型曲面积分的定义

定义

设 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为 C^1 的参数曲面, f 是定义在此曲面 Σ 上的连续函数, 则 f 在 Σ 上的曲面积分定义为

$$\int_\Sigma f \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f \sqrt{\det[(J\varphi)^T J\varphi]}\ .$$

定义

设 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为 C^1 的参数曲面, f 是定义在此曲面 Σ 上的连续函数, 则 f 在 Σ 上的曲面积分定义为

$$\int_\Sigma f \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f \sqrt{\det[(J\varphi)^T J\varphi]} \, .$$

第一型曲面积分的物理含义:

定义

设 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为 C^1 的参数曲面, f 是定义在此曲面 Σ 上的连续函数, 则 f 在 Σ 上的曲面积分定义为

$$\int_\Sigma f \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f \sqrt{\det[(J\varphi)^T J\varphi]} \ .$$

第一型曲面积分的物理含义:分布在曲面上的某种物质, 如果其密度函数为 ρ, 则 ρ 在曲面上的积分就是物质的质量.

例

计算曲面积分 $\int_{\Sigma} \frac{1}{z} \mathrm{d}\sigma$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ 所截下的顶部, 此处 $0 < h < a$.

例

计算曲面积分 $\int_{\Sigma} \frac{1}{z} \mathrm{d}\sigma$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ 所截下的顶部, 此处 $0 < h < a$.

解. 即 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2 - h^2\}$. 则 Σ 的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D.$$

例

计算曲面积分 $\int_\Sigma \frac{1}{z}\mathrm{d}\sigma$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ 所截下的顶部, 此处 $0<h<a$.

解. 即 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$. 则 Σ 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D.$$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

例

计算曲面积分 $\int_\Sigma \frac{1}{z}\mathrm{d}\sigma$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ 所截下的顶部, 此处 $0<h<a$.

解. 即 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$. 则 Σ 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D.$$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \frac{1}{z}\mathrm{d}\sigma &= \int_D \frac{1}{z}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_D \frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

解. 使用极坐标计算此二重积分, 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \sqrt{a^2 - h^2}]$.

解. 使用极坐标计算此二重积分, 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \sqrt{a^2 - h^2}]$.于是

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \frac{1}{z}\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a}{a^2 - r^2} r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{a}{a^2 - r^2} \mathrm{d}r^2 \\
&\overset{t=a^2-r^2}{=} \pi a \int_{a^2}^{h^2} \frac{-1}{t} \mathrm{d}t \\
&= \pi a \int_{h^2}^{a^2} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \\
&= 2\pi a \ln\left(\frac{a}{h}\right).
\end{aligned}$$

∎

电场强度通量

设 $\mathbf{E}$ 是静电场, 即 $\mathbf{E}$ 可视为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上的一个向量值函数. 若 $\mathbf{E}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ 是常值映射, 即对每一点 $(x, y, z) \in \Omega$, $\mathbf{E}(x, y, z)$ 的大小和方向都是恒定的, 大小就记为 E. 此时取垂直于此电场方向的一个平面 Σ, 其面积为 S, 则定义通过该平面 Σ 的电场总数为

$$\psi_E = ES.$$

称 ψ_E 为通过 Σ 的**电场强度通量**或**E通量**.

如果 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 夹角为 θ, 则电场强度通量为

$$\Psi_E = E\cos\theta S,$$

令 $E_n = E\cos\theta$, 称为电场强度 $\mathbf{E}$ 在平面 Σ 法向方向的分量. 即 $\Psi_E = E_n S$.

如果 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 夹角为 θ, 则电场强度通量为

$$\Psi_E = E\cos\theta S,$$

令 $E_n = E\cos\theta$, 称为电场强度 $\mathbf{E}$ 在平面 Σ 法向方向的分量. 即 $\Psi_E = E_n S$.

- 当 θ 为锐角时, $\cos\theta > 0$, 通量为正值;

如果 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 夹角为 θ, 则电场强度通量为

$$\Psi_E = E\cos\theta S,$$

令 $E_n = E\cos\theta$, 称为电场强度 $\mathbf{E}$ 在平面 Σ 法向方向的分量. 即 $\Psi_E = E_n S$.

- 当 θ 为锐角时, $\cos\theta > 0$, 通量为正值;
- 当 θ 为钝角时, $\cos\theta < 0$, 通量为负值;

如果 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 夹角为 θ, 则电场强度通量为

$$\Psi_E = E\cos\theta S,$$

令 $E_n = E\cos\theta$, 称为电场强度 $\mathbf{E}$ 在平面 Σ 法向方向的分量. 即 $\Psi_E = E_n S$.

- 当 θ 为锐角时, $\cos\theta > 0$, 通量为正值;
- 当 θ 为钝角时, $\cos\theta < 0$, 通量为负值;
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\theta = 0$, 通量为零.

如果 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 与电场 $\mathbf{E}$ 夹角为 θ, 则电场强度通量为

$$\Psi_E = E\cos\theta S,$$

令 $E_n = E\cos\theta$, 称为电场强度 $\mathbf{E}$ 在平面 Σ 法向方向的分量. 即 $\Psi_E = E_n S$.

- 当 θ 为锐角时, $\cos\theta > 0$, 通量为正值;
- 当 θ 为钝角时, $\cos\theta < 0$, 通量为负值;
- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\theta = 0$, 通量为零.

一般情况下, 电场是不均匀的, 并且几何面 Σ 也可能不是平面, 而是普通的连续曲面. 此时利用微元法, 对于面积微元 $\mathrm{d}S$（有时也记为 $\mathrm{d}\Sigma$）, 上面的电场强度 $\mathbf{E}$ 可以认为是均匀的, $\mathrm{d}S$ 的法向量 $\vec{n}$ 与 $\mathbf{E}$ 的夹角为 θ, 则通过 $\mathrm{d}S$ 的 $\mathbf{E}$通量为

$$\mathrm{d}\Psi_E = E\cos\theta\mathrm{d}S = E_n\mathrm{d}S.$$

一般情况下, 电场是不均匀的, 并且几何面 Σ 也可能不是平面, 而是普通的连续曲面. 此时利用微元法, 对于面积微元 $\mathrm{d}S$（有时也记为 $\mathrm{d}\Sigma$）, 上面的电场强度 $\mathbf{E}$ 可以认为是均匀的, $\mathrm{d}S$ 的法向量 $\vec{n}$ 与 $\mathbf{E}$ 的夹角为 θ, 则通过 $\mathrm{d}S$ 的 $\mathbf{E}$通量为

$$\mathrm{d}\Psi_E = E\cos\theta\mathrm{d}S = E_n\mathrm{d}S.$$

通过整个曲面 Σ 的电场强度通量为第一型曲面积分

$$\Psi_E = \iint_\Sigma E\cos\theta\mathrm{d}S = \iint_\Sigma E_n\mathrm{d}S.$$

一般情况下, 电场是不均匀的, 并且几何面 Σ 也可能不是平面, 而是普通的连续曲面. 此时利用微元法, 对于面积微元 $\mathrm{d}S$（有时也记为 $\mathrm{d}\Sigma$）, 上面的电场强度 $\mathbf{E}$ 可以认为是均匀的, $\mathrm{d}S$ 的法向量 $\vec{n}$ 与 $\mathbf{E}$ 的夹角为 θ, 则通过 $\mathrm{d}S$ 的 $\mathbf{E}$通量为

$$\mathrm{d}\Psi_E = E\cos\theta\mathrm{d}S = E_n\mathrm{d}S.$$

通过整个曲面 Σ 的电场强度通量为第一型曲面积分

$$\Psi_E = \iint_\Sigma E\cos\theta\mathrm{d}S = \iint_\Sigma E_n\mathrm{d}S.$$

当 Σ 是闭合曲面时, 上式可写为

$$\Psi_E = \oiint_\Sigma E\cos\theta\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma E_n\mathrm{d}S.$$

关于曲面法线的方向选择

- 对于非闭合曲面，面法线的正方向可以取曲面的任一侧;

关于曲面法线的方向选择

- 对于非闭合曲面, 面法线的正方向可以取曲面的任一侧;
- 对于闭合曲面, 通常规定自内向外的方向为曲面法线的正方向.

面积元矢量

令

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S,$$

称为**面积元矢量**.

面积元矢量

令

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S,$$

称为**面积元矢量**.

于是 $E\cos\theta\mathrm{d}S$ 可写为 $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

面积元矢量

令

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S,$$

称为**面积元矢量**.

于是 $E\cos\theta\mathrm{d}S$ 可写为 $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.因此,

$$\Psi_E = \iint_{\Sigma} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

面积元矢量

令

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S,$$

称为**面积元矢量**.

于是 $E\cos\theta\mathrm{d}S$ 可写为 $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.因此,

$$\Psi_E = \iint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

当 Σ 为闭曲面时, 可写为

$$\Psi_E = \oiint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.