曲线积分与曲面积分

徐海峰整理

July 11, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

本章讨论欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中曲线以及曲面上的积分理论, 包括曲线的长度, 曲面的面积, 以及曲线、曲面上函数和向量值函数的积分, 并讨论这些积分之间的联系.

第一型曲线积分

对于平面曲线 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$, 如果 $x(t)$, $y(t)$ 是关于 t 的连续可微函数, 则利用折线逼近曲线的办法, 我们定义了 σ 的**长度**为

$$L(\sigma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

对于平面曲线 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, 如果 $x(t)$, $y(t)$ 是关于 t 的连续可微函数, 则利用折线逼近曲线的办法, 我们定义了 σ 的**长度**为

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

现在考虑一般的情形.

对于平面曲线 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$, 如果 $x(t)$, $y(t)$ 是关于 t 的连续可微函数, 则利用折线逼近曲线的办法, 我们定义了 σ 的**长度**为

$$L(\sigma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

现在考虑一般的情形.映射 $\sigma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ 称为一条**参数曲线**, 我们仍用折线逼近曲线的办法定义 σ 的长度.

对于平面曲线 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$, 如果 $x(t)$, $y(t)$ 是关于 t 的连续可微函数, 则利用折线逼近曲线的办法, 我们定义了 σ 的**长度**为

$$L(\sigma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

现在考虑一般的情形.映射 $\sigma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ 称为一条**参数曲线**, 我们仍用折线逼近曲线的办法定义 σ 的长度.为此, 任取 $[\alpha,\beta]$ 的分割

$$\pi:\ \alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=\beta,$$

对于平面曲线 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$, 如果 $x(t)$, $y(t)$ 是关于 t 的连续可微函数, 则利用折线逼近曲线的办法, 我们定义了 σ 的**长度**为

$$L(\sigma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

现在考虑一般的情形.映射 $\sigma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ 称为一条**参数曲线**, 我们仍用折线逼近曲线的办法定义 σ 的长度.为此, 任取 $[\alpha,\beta]$ 的分割

$$\pi:\ \alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=\beta,$$

相继用直线段连接曲线上的分点 $\sigma(t_{i-1})$ 与 $\sigma(t_i)$ $(1\leqslant t\leqslant m)$, 得到的折线的长度为

$$L(\sigma;\pi)=\sum_{i=1}^{m}\|\sigma(t_i)-\sigma(t_{i-1})\|.$$

如果这些折线的长度有上界, 即

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{m} \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| < +\infty,$$

则称 σ 是**可求长曲线**, 其长度定义为

$$L(\sigma) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{m} \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

利用三角不等式我们知道当区间 $[\alpha, \beta]$ 的分割加细时, 折线的长度单调递增.

利用三角不等式我们知道当区间 $[\alpha,\beta]$ 的分割加细时, 折线的长度单调递增.

如果 $\sigma(t)$ 的每一个分量均为连续可微函数, 则由第七章第一节的推导知 σ 是可求长的, 且长度可以表示为积分

$$L(\sigma)=\int_\alpha^\beta \|\sigma'(t)\|\mathrm{d}t.$$

如果曲线不连续, 则我们这里给出的曲线长度定义和直观上的长度观念不是一回事.

如果曲线不连续, 则我们这里给出的曲线长度定义和直观上的长度观念不是一回事.

例如, 考虑这样的曲线:

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} (0,0), & \text{当 } t = 0\text{时}, \\ (t,1), & \text{当 } 0 < t \leqslant 1\text{时}. \end{cases}$$

如果曲线不连续, 则我们这里给出的曲线长度定义和直观上的长度观念不是一回事.

例如, 考虑这样的曲线:

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} (0,0), & \text{当 } t = 0\text{时}, \\ (t,1), & \text{当 } 0 < t \leqslant 1\text{时}. \end{cases}$$

按我们的定义, 此曲线长度为 2.

可求长曲线的性质

设 σ 为 $\mathbb{R}^n$ 中定义在 $[\alpha,\beta]$ 上的可求长曲线. 从定义可以得到可求长曲线的下列性质:

- 对任意 $[\gamma,\delta]\subset[\alpha,\beta]$, $\sigma|_{[\gamma,\delta]}$ 也是可求长的.
- 对任意 $\gamma\in[\alpha,\beta]$, 有

$$L(\sigma)=L(\sigma|_{[\alpha,\gamma]})+L(\sigma|_{[\gamma,\beta]}).$$

设 σ 为 $\mathbb{R}^n$ 中定义在 $[\alpha,\beta]$ 上的可求长曲线. 从定义可以得到可求长曲线的下列性质:

- 对任意 $[\gamma,\delta]\subset[\alpha,\beta]$, $\sigma|_{[\gamma,\delta]}$ 也是可求长的.
- 对任意 $\gamma\in[\alpha,\beta]$, 有

$$L(\sigma)=L(\sigma|_{[\alpha,\gamma]})+L(\sigma|_{[\gamma,\beta]}).$$

其中第二个性质是曲线长度的可加性, 其证明仍然是利用三角不等式.

有界变差函数

为了导出曲线可求长的充分必要条件, 我们引入**有界变差函数**的概念.

有界变差函数

为了导出曲线可求长的充分必要条件, 我们引入**有界变差函数**的概念.

定义

设 f 为定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的函数. 任给分割

$$\pi: \ \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

记

$$v(f;\pi) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

有界变差函数

为了导出曲线可求长的充分必要条件, 我们引入**有界变差函数**的概念.

定义

设 f 为定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的函数. 任给分割

$$\pi: \ \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

记

$$v(f;\pi) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

如果 $\sup_\pi v(f;\pi)$ 有限, 则称 f 为 $[\alpha, \beta]$ 上的**有界变差函数**, 它在 $[\alpha, \beta]$ 上的全变差记为

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f) = \sup_{\pi} v(f;\pi).$$

有界变差函数

为了导出曲线可求长的充分必要条件, 我们引入**有界变差函数**的概念.

定义

设 f 为定义在 $[\alpha,\beta]$ 上的函数. 任给分割

$$\pi:\ \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

记

$$v(f;\pi) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

如果 $\sup_\pi v(f;\pi)$ 有限, 则称 f 为 $[\alpha,\beta]$ 上的**有界变差函数**, 它在 $[\alpha,\beta]$ 上的全变差记为

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f) = \sup_{\pi} v(f;\pi).$$

称 $v(f;\pi)$ 为 f 关于分割 π 的**累积变差**.

称 $v(f;\pi)$ 为 f 关于分割 π 的**累积变差**.

注

这里**累积变差**的概念是我私自命名的. 函数 f 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的**变差**定义为 $|f(x_i)-f(x_{i-1})|$, 即函数 f 在区间端点上的值的绝对变化量. 将这些绝对变化量相加, 得到的值

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

称为关于分割 π 的**累积变差**.

常见的有界变差函数

下列函数都是有界变差函数:

常见的有界变差函数

下列函数都是有界变差函数:

- 单调函数
- Lipschitz 函数
- 连续可微函数
- 黎曼可积函数的变上限积分

单调函数

如果 f 为 $[\alpha, \beta]$ 上的单调函数,

单调函数

如果 f 为 $[\alpha,\beta]$ 上的单调函数,例如单调递增, 则对任意的分割 π, 有

$$v(f;\pi)=\sum_{i=1}^{m}|f(t_i)-f(t_{i-1})|=\sum_{i=1}^{m}f(t_i)-f(t_{i-1})=f(\beta)-f(\alpha),$$

单调函数

如果 f 为 $[\alpha,\beta]$ 上的单调函数,例如单调递增, 则对任意的分割 π, 有

$$v(f;\pi)=\sum_{i=1}^{m}|f(t_i)-f(t_{i-1})|=\sum_{i=1}^{m}f(t_i)-f(t_{i-1})=f(\beta)-f(\alpha),$$

这说明

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f)=|f(\beta)-f(\alpha)|.$$

单调函数

如果 f 为 $[\alpha, \beta]$ 上的单调函数,例如单调递增, 则对任意的分割 π, 有

$$v(f;\pi) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{m} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(\beta) - f(\alpha),$$

这说明

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta}(f) = |f(\beta) - f(\alpha)|.$$

故单调函数是有界变差函数.

Lipschitz 函数

设 f 是 Lipschitz 函数,

Lipschitz 函数

设 f 是 Lipschitz 函数,即存在 $L > 0$, 使得 $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$, 对任意 $x, y \in D_f$ 成立. 这里 D_f 是 f 的定义域.

设 f 是 Lipschitz 函数,即存在 $L > 0$, 使得 $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$, 对任意 $x, y \in D_f$ 成立. 这里 D_f 是 f 的定义域.则

$$v(f;\pi) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{m} L|t_i - t_{i-1}| = L(\beta - \alpha),$$

因而 f 是有界变差函数.

连续可微函数

根据微分中值定理, 闭区间上的连续可微函数都是 Lipschitz 函数, 因而是有界变差函数.

黎曼可积函数的变上限积分

如果 $g(x)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

是 Lipschitz 函数, 因此也是有界变差函数.

黎曼可积函数的变上限积分

如果 $g(x)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$f(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

是 Lipschitz 函数, 因此也是有界变差函数.

事实上, 由黎曼可积的必要条件知 $g(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有界, 不妨设为 M(即 $|g(x)| \leqslant M, \forall x \in [\alpha, \beta]$).

黎曼可积函数的变上限积分

如果 $g(x)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

是 Lipschitz 函数, 因此也是有界变差函数.

事实上, 由黎曼可积的必要条件知 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界, 不妨设为 M(即 $|g(x)|\leqslant M,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$).于是

$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-\int_a^y g(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_y^x g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-y|.$$

如果 $g(x)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

是 Lipschitz 函数, 因此也是有界变差函数.

事实上, 由黎曼可积的必要条件知 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界, 不妨设为 M(即 $|g(x)|\leqslant M,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$).于是

$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-\int_a^y g(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_y^x g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-y|.$$

故 f 是 $[\alpha,\beta]$ 上的 Lipschitz 函数.

可以证明, 有界变差函数必为两个单调递增函数的差.

定理 (Jordan)

曲线 $\sigma(t)$ 可求长当且仅当它的每一个分量均为有界变差函数.

定理 (Jordan)

曲线 $\sigma(t)$ 可求长当且仅当它的每一个分量均为有界变差函数.

Proof.

设 $\sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ 可求长, 则任给 $[\alpha, \beta]$ 的分割 π, x_i 关于此分割的累积变差

$$v(x_i; \pi) = \sum_{j=1}^{m} |x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \leqslant L(\sigma),$$

定理 (Jordan)

曲线 $\sigma(t)$ 可求长当且仅当它的每一个分量均为有界变差函数.

Proof.

设 $\sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ 可求长, 则任给 $[\alpha, \beta]$ 的分割 π, x_i 关于此分割的累积变差

$$v(x_i; \pi) = \sum_{j=1}^{m} |x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \leqslant L(\sigma),$$

这里第一个不等号是因为

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})|^2}.$$

定理 (Jordan)

曲线 $\sigma(t)$ 可求长当且仅当它的每一个分量均为有界变差函数.

Proof.

设 $\sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ 可求长, 则任给 $[\alpha, \beta]$ 的分割 π, x_i 关于此分割的累积变差

$$v(x_i; \pi) = \sum_{j=1}^{m} |x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \leqslant L(\sigma),$$

这里第一个不等号是因为

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})|^2}.$$

这说明 $x_i(t)$ 为有界变差函数. □

Proof.

反之, 如果每一个 $x_i(t)$ 都是有界变差函数, 则

$$
\begin{aligned}
L(\sigma;\pi) &= \sum_{j=1}^{m} \|\sigma(t_j)-\sigma(t_{j-1})\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big(|x_1(t_j)-x_1(t_{j-1})| + \cdots + |x_n(t_j)-x_n(t_{j-1})|\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v(x_i;\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \bigvee_{\alpha}^{\beta}(x_i).
\end{aligned}
$$

Proof.

反之, 如果每一个 $x_i(t)$ 都是有界变差函数, 则

$$\begin{aligned} L(\sigma;\pi) &= \sum_{j=1}^{m} \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big(|x_1(t_j) - x_1(t_{j-1})| + \cdots + |x_n(t_j) - x_n(t_{j-1})| \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(x_i;\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \bigvee_{\alpha}^{\beta}(x_i). \end{aligned}$$

因此, $\sigma(t)$ 是可求长的. $\square$

弧长函数

以下总假设曲线 $\sigma(t)$ 是可求长的.

弧长函数

以下总假设曲线 $\sigma(t)$ 是可求长的.对 $t \in [\alpha, \beta]$, 定义

$$s(t) = L(\sigma\big|_{[\alpha,t]}),$$

弧长函数

以下总假设曲线 $\sigma(t)$ 是可求长的.对 $t \in [\alpha, \beta]$, 定义

$$s(t) = L(\sigma\big|_{[\alpha,t]}),$$

则 $s(t)$ 为单调递增函数, 称为 $\sigma(t)$ 的**弧长函数**, 并且

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\sigma\big|_{[t_1,t_2]}), \quad t_1 \leqslant t_2.$$

弧长函数

以下总假设曲线 $\sigma(t)$ 是可求长的.对 $t \in [\alpha, \beta]$, 定义

$$s(t) = L(\sigma\big|_{[\alpha,t]}),$$

则 $s(t)$ 为单调递增函数, 称为 $\sigma(t)$ 的**弧长函数**, 并且

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\sigma\big|_{[t_1,t_2]}), \quad t_1 \leqslant t_2.$$

因此, 如果 $t_2 > t_1$, $s(t_2) = s(t_1)$,

弧长函数

以下总假设曲线 $\sigma(t)$ 是可求长的.对 $t \in [\alpha, \beta]$, 定义

$$s(t) = L(\sigma\big|_{[\alpha,t]}),$$

则 $s(t)$ 为单调递增函数, 称为 $\sigma(t)$ 的**弧长函数**, 并且

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\sigma\big|_{[t_1,t_2]}), \quad t_1 \leqslant t_2.$$

因此, 如果 $t_2 > t_1$, $s(t_2) = s(t_1)$,则 $\sigma(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上取常值.

以下总假设曲线 $\sigma(t)$ 是可求长的.对 $t \in [\alpha, \beta]$, 定义

$$s(t) = L(\sigma\big|_{[\alpha,t]}),$$

则 $s(t)$ 为单调递增函数, 称为 $\sigma(t)$ 的**弧长函数**, 并且

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\sigma\big|_{[t_1,t_2]}), \quad t_1 \leqslant t_2.$$

因此, 如果 $t_2 > t_1$, $s(t_2) = s(t_1)$,则 $\sigma(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上取常值.

如果 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值,

以下总假设曲线 $\sigma(t)$ 是可求长的.对 $t \in [\alpha, \beta]$, 定义

$$s(t) = L(\sigma\big|_{[\alpha,t]}),$$

则 $s(t)$ 为单调递增函数, 称为 $\sigma(t)$ 的**弧长函数**, 并且

$$s(t_2) - s(t_1) = L(\sigma\big|_{[t_1,t_2]}), \quad t_1 \leqslant t_2.$$

因此, 如果 $t_2 > t_1$, $s(t_2) = s(t_1)$,则 $\sigma(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上取常值.

如果 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值,则 $s(t)$ 为严格单调递增函数.

命题

当 $\sigma(t)$ 为可求长的连续曲线时, $s(t)$ 也是连续函数.

命题

当 $\sigma(t)$ 为可求长的连续曲线时, $s(t)$ 也是连续函数.

当 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值时, $s(t)$ 是参数 t 的连续的严格单调递增函数,

命题

当 $\sigma(t)$ 为可求长的连续曲线时, $s(t)$ 也是连续函数.

当 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值时, $s(t)$ 是参数 t 的连续的严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t = t(s)$:

$$\begin{aligned} t: \ [0, L(\sigma)] &\rightarrow [\alpha, \beta] \\ s &\mapsto t(s) \end{aligned}$$

命题

当 $\sigma(t)$ 为可求长的连续曲线时, $s(t)$ 也是连续函数.

当 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值时, $s(t)$ 是参数 t 的连续的严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t = t(s)$:

$$\begin{aligned} t:\ [0, L(\sigma)] &\ \to\ [\alpha, \beta] \\ s &\ \mapsto\ t(s) \end{aligned}$$

这时, $\sigma(t) = \sigma(t(s))$ 又可看作关于 s 的参数曲线.

命题

当 $\sigma(t)$ 为可求长的连续曲线时, $s(t)$ 也是连续函数.

当 $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值时, $s(t)$ 是参数 t 的连续的严格单调递增函数,从而可逆, 其逆记为 $t = t(s)$:

$$\begin{array}{rccc} t: & [0, L(\sigma)] & \to & [\alpha, \beta] \\ & s & \mapsto & t(s) \end{array}$$

这时, $\sigma(t) = \sigma(t(s))$ 又可看作关于 s 的参数曲线.我们将 s 称为**弧长参数**.

当 $\sigma(t)$ 为连续可微曲线, 且 $\|\sigma'(t)\|$ 在任何区间上不恒为零（例如, 处处非零, 也即 $x_1'(t)$, $x_2'(t)$, ..., $x_n'(t)$ 处处不同时为零）时,

当 $\sigma(t)$ 为连续可微曲线, 且 $\|\sigma'(t)\|$ 在任何区间上不恒为零（例如, 处处非零, 也即 $x_1'(t)$, $x_2'(t)$, ..., $x_n'(t)$ 处处不同时为零）时,上一段的讨论对 $\sigma(t)$ 完全适用, $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值.

当 $\sigma(t)$ 为连续可微曲线, 且 $\|\sigma'(t)\|$ 在任何区间上不恒为零（例如, 处处非零, 也即 $x_1'(t)$, $x_2'(t)$, $\ldots$, $x_n'(t)$ 处处不同时为零）时,上一段的讨论对 $\sigma(t)$ 完全适用, $\sigma(t)$ 不在任何区间上取常值.此时,

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\| \quad \text{或} \quad \mathrm{d}s = \|\sigma'(t)\|\mathrm{d}t.$$

现在我们考虑可求长曲线上有界函数的积分.

现在我们考虑可求长曲线上有界函数的积分.

设 f 是定义在 σ 上的有界函数, 即对任意的 $\sigma(t)$, $f(\sigma(t))$ 是定义好的实数.

现在我们考虑可求长曲线上有界函数的积分.

设 f 是定义在 σ 上的有界函数, 即对任意的 $\sigma(t)$, $f(\sigma(t))$ 是定义好的实数.

任给 $[\alpha, \beta]$ 的分割 π, 取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, 考虑和

$$\sum_{i=1}^{m} f(\sigma(\xi_i))\Delta s_i,$$

其中 $\Delta s_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$.

现在我们考虑可求长曲线上有界函数的积分.

设 f 是定义在 σ 上的有界函数, 即对任意的 $\sigma(t)$, $f(\sigma(t))$ 是定义好的实数.

任给 $[\alpha,\beta]$ 的分割 π, 取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, 考虑和

$$\sum_{i=1}^{m} f(\sigma(\xi_i))\Delta s_i,$$

其中 $\Delta s_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$.如果极限

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\sigma(\xi_i))\Delta s_i$$

存在且与 $\{\xi_i\}$ 的选取无关, 则称此极限为 f 在 σ 上的**第一型曲线积分**, 记为

$$\int_{\sigma} f \mathrm{d}s = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\sigma(\xi_i))\Delta s_i \ .$$

现在我们考虑可求长曲线上有界函数的积分.

设 f 是定义在 σ 上的有界函数, 即对任意的 $\sigma(t)$, $f(\sigma(t))$ 是定义好的实数.

任给 $[\alpha, \beta]$ 的分割 π, 取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, 考虑和

$$\sum_{i=1}^{m} f(\sigma(\xi_i))\Delta s_i,$$

其中 $\Delta s_i = s(t_i) - s(t_{i-1})$.如果极限

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\sigma(\xi_i))\Delta s_i$$

存在且与 $\{\xi_i\}$ 的选取无关, 则称此极限为 f 在 σ 上的**第一型曲线积分**, 记为

$$\int_\sigma f \mathrm{d}s = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\sigma(\xi_i))\Delta s_i \ .$$

当 $f = 1$ 时, 第一型曲线积分就是曲线的长度.

第一型曲线积分的物理意义

第一型曲线积分的物理意义可如下理解: 已知某线状物质的（线）密度函数为 ρ, 则该物质的质量就是 ρ 的曲线积分.

当曲线 σ 的弧长参数存在时, 第一型曲线积分可以转化为通常的 Riemann 积分:

$$\int_\sigma f \mathrm{d}s = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) \mathrm{d}s \ ;$$

当曲线 σ 的弧长参数存在时, 第一型曲线积分可以转化为通常的 Riemann 积分:

$$\int_\sigma f \mathrm{d}s = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) \mathrm{d}s \ ;$$

如果 $\sigma(t)$ 为（分段）连续可微曲线, 则 f 在 σ 上的第一型曲线积分可以写为（例如 f 连续时）:

$$\int_\sigma f \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \mathrm{d}t \ .$$

当曲线 σ 的弧长参数存在时, 第一型曲线积分可以转化为通常的 Riemann 积分:

$$\int_{\sigma} f \mathrm{d}s = \int_{0}^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) \mathrm{d}s \ ;$$

如果 $\sigma(t)$ 为（分段）连续可微曲线, 则 f 在 σ 上的第一型曲线积分可以写为（例如 f 连续时）:

$$\int_{\sigma} f \mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \mathrm{d}t \ .$$

一般地, 第一型曲线积分是所谓 Riemann-Stieltjes 积分的一种特殊情形.

附录

有界变差函数的性质

命题

有界变差函数必为有界函数

有界变差函数的性质

命题

有界变差函数必为有界函数

Proof.

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant |f(a)| + \bigvee_a^b (f).$$

□

命题

两个有界变差函数的线性组合以及乘积仍为有界变差函数.

命题

两个有界变差函数的线性组合以及乘积仍为有界变差函数.

Proof.

设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

命题

两个有界变差函数的线性组合以及乘积仍为有界变差函数.

Proof.

设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) 任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

命题

两个有界变差函数的线性组合以及乘积仍为有界变差函数.

Proof.

设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) 任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

$$\begin{aligned}
v(\alpha f + \beta g; \pi) &= \sum_{i=1}^{n} \Big| \big(\alpha f(x_i) + \beta g(x_i)\big) - \big(\alpha f(x_{i-1}) + \beta g(x_{i-1})\big) \Big| \\
&\leqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \beta \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\
&= \alpha v(f; \pi) + \beta v(g; \pi),
\end{aligned}$$

□

Proof.

由于 f, g 均为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 故 $\alpha f + \beta g$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

Proof.

由于 f, g 均为 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 故 $\alpha f+\beta g$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

事实上, 上式两边取上确界 $\sup_{\pi}$, 得

$$\sup_{\pi} v(\alpha f+\beta g;\pi) \leqslant \alpha \sup_{\pi} v(f;\pi)+\beta \sup_{\pi} v(g;\pi).$$

$\square$

$f \cdot g$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数

Proof.

(2) 任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

$f \cdot g$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数

Proof.

(2) 任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

由于 f, g 均为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 故它们均有界.

$f \cdot g$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数

Proof.

(2) 任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

由于 f, g 均为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 故它们均有界.

不妨设 $|f(x)| \leqslant M$, $|g(x)| \leqslant M$, $\forall\ x \in [a, b]$. $\square$

Proof.

$$
\begin{aligned}
v(fg;\pi) &= \sum_{i=1}^{n} \bigl| f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) \bigr| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \bigl| f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) \bigr| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \bigl| f(x_i) \bigr| \cdot \bigl| g(x_i) - g(x_{i-1}) \bigr| + \bigl| f(x_i) - f(x_{i-1}) \bigr| \cdot \bigl| g(x_{i-1}) \bigr| \\
&\leqslant M \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + M \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= M \cdot \bigl(v(g;\pi) + v(f;\pi) \bigr),
\end{aligned}
$$

Proof.

$$\begin{aligned}
v(fg;\pi) &= \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)\right| \cdot \left|g(x_i) - g(x_{i-1})\right| + \left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right| \cdot \left|g(x_{i-1})\right| \\
&\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|g(x_i) - g(x_{i-1})| + M\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&= M \cdot \big(v(g;\pi) + v(f;\pi)\big),
\end{aligned}$$

故 $f \cdot g$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数. $\square$

命题

设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 且 $|g(x)| \geqslant \lambda > 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

命题

设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 且 $|g(x)| \geqslant \lambda > 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

Proof.

任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

命题

设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 且 $|g(x)| \geqslant \lambda > 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

Proof.

任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

由于 f, g 均为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 故它们均有界.

命题

设 f, g 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 且 $|g(x)| \geqslant \lambda > 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 也是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

Proof.

任取 $[a, b]$ 的一个分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

由于 f, g 均为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 故它们均有界.

不妨设 $|f(x)| \leqslant M$, $|g(x)| \leqslant M$, $\forall\ x \in [a, b]$. $\square$

Proof.

$$
\begin{aligned}
v\Big(\frac{f}{g};\pi\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f(x_i)}{g(x_i)}-\frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_i))}{g(x_i)g(x_{i-1})}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\Big|f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})+f(x_{i-1})g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_i))\Big| \\
&\leqslant \frac{M}{\lambda^2}\Big[\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\Big] \\
&= \frac{M}{\lambda^2}\Big(v(f;\pi)+v(g;\pi)\Big),
\end{aligned}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
v\Big(\frac{f}{g};\pi\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f(x_i)}{g(x_i)}-\frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_i))}{g(x_i)g(x_{i-1})}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\Big|f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})+f(x_{i-1})g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_i))\Big| \\
&\leqslant \frac{M}{\lambda^2}\left[\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\right] \\
&= \frac{M}{\lambda^2}\Big(v(f;\pi)+v(g;\pi)\Big),
\end{aligned}
$$

故 $\frac{f}{g}$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. $\square$

命题

设 $c \in (a,b)$. 则 f 在 $[a,b]$ 上为有界变差函数当且仅当 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均为有界变差函数, 此时

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f).$$

命题

设 $c \in (a,b)$. 则 f 在 $[a,b]$ 上为有界变差函数当且仅当 f 在 *[a,c]* 和 $[c,b]$ 上均为有界变差函数, 此时

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f).$$

Proof.

$(\Rightarrow)$ 设 f 在 $[a,b]$ 上为有界变差函数,

命题

设 $c \in (a, b)$. 则 f 在 $[a, b]$ 上为有界变差函数当且仅当 f 在 $[a,c]$ 和 $[c, b]$ 上均为有界变差函数, 此时

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f).$$

Proof.

(⇒) 设 f 在 $[a, b]$ 上为有界变差函数,任取区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 的分割 π_1 和 π_2, 则

$$v(f|_{[a,c]}; \pi_1) + v(f|_{[c,b]}; \pi_2) = v(f; \pi_1 \cup \pi_2) \leqslant \bigvee_a^b(f),$$

命题

设 $c \in (a,b)$. 则 f 在 $[a,b]$ 上为有界变差函数当且仅当 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均为有界变差函数, 此时

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f).$$

Proof.

$(\Rightarrow)$ 设 f 在 $[a,b]$ 上为有界变差函数,任取区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的分割 π_1 和 π_2, 则

$$v(f|_{[a,c]};\pi_1) + v(f|_{[c,b]};\pi_2) = v(f;\pi_1 \cup \pi_2) \leqslant \bigvee_a^b(f),$$

这说明 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均为有界变差函数, 且

$$\bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) \leqslant \bigvee_a^b(f). \tag{1}$$

Proof.

反之, 如果 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上均为有界变差函数, 则任取 $[a, b]$ 的分割 π, 如果 c 不在 π 的分点之内, 则添加 c 为分点, 此时 f 的变差和不会变小, 从而

$$v(f;\pi) \leqslant \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f),$$

Proof.

反之, 如果 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上均为有界变差函数, 则任取 $[a, b]$ 的分割 π, 如果 c 不在 π 的分点之内, 则添加 c 为分点, 此时 f 的变差和不会变小, 从而

$$v(f;\pi) \leqslant \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f),$$

即 f 在 $[a, b]$ 上也是有界变差函数, 且

$$\bigvee_a^b(f) \leqslant \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f). \tag{2}$$

Proof.

反之, 如果 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均为有界变差函数, 则任取 $[a,b]$ 的分割 π, 如果 c 不在 π 的分点之内, 则添加 c 为分点, 此时 f 的变差和不会变小, 从而

$$v(f;\pi) \leqslant \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f),$$

即 f 在 $[a,b]$ 上也是有界变差函数, 且

$$\bigvee_a^b(f) \leqslant \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f). \tag{2}$$

将 (1) 和 (2) 结合起来就得到了所证等式

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f).$$

$\square$

推论

设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 则

$$g(x)=\bigvee_a^x(f),\quad x\in[a,b]$$

为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

推论

设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 则

$$g(x)=\bigvee_a^x(f),\quad x\in[a,b]$$

为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

Proof.

设 $x\leqslant y\in[a,b]$, 则

$$g(y)-g(x)=\bigvee_a^y(f)-\bigvee_a^x(f)=\bigvee_x^y(f)\geqslant 0,$$

推论

设 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则

$$g(x) = \bigvee_a^x (f), \quad x \in [a, b]$$

为 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

Proof.

设 $x \leqslant y \in [a, b]$, 则

$$g(y) - g(x) = \bigvee_a^y (f) - \bigvee_a^x (f) = \bigvee_x^y (f) \geqslant 0,$$

因此 g 为单调递增函数, 故是有界变差函数. $\square$

有界变差函数的刻画

命题

f 为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

有界变差函数的刻画

命题

f 为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

Proof.

只需证明必要性.

命题

f 为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

Proof.

只需证明必要性.设 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数,

有界变差函数的刻画

命题

f 为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

Proof.

只需证明必要性.设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数,令

$$g(x)=\bigvee_a^x(f),\quad h(x)=g(x)-f(x),\quad x\in[a,b],$$

有界变差函数的刻画

命题

f 为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

Proof.

只需证明必要性.设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数,令

$$g(x)=\bigvee_a^x(f),\quad h(x)=g(x)-f(x),\quad x\in[a,b],$$

则 $f=g-h$.

有界变差函数的刻画

命题

f 为有界变差函数当且仅当它是两个单调递增函数之差.

Proof.

只需证明必要性.设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数,令

$$g(x)=\bigvee_a^x(f),\quad h(x)=g(x)-f(x),\quad x\in[a,b],$$

则 $f=g-h$.我们已经知道 g 单调递增, 下面说明 h 也是单调递增的. $\square$

Proof.

任取 $x \leqslant y \in [a, b]$, 则

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= [g(y) - f(y)] - [g(x) - f(x)] \\ &= [g(y) - g(x)] - [f(y) - f(x)] \\ &= \bigvee_x^y(f) - [f(y) - f(x)] \\ &\geqslant |f(y) - f(x)| - [f(y) - f(x)] \geqslant 0, \end{aligned}$$

Proof.

任取 $x \leqslant y \in [a, b]$, 则

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= [g(y) - f(y)] - [g(x) - f(x)] \\ &= [g(y) - g(x)] - [f(y) - f(x)] \\ &= \bigvee_x^y (f) - [f(y) - f(x)] \\ &\geqslant |f(y) - f(x)| - [f(y) - f(x)] \geqslant 0, \end{aligned}$$

因此 h 也是单调递增函数, 从而为 $[a, b]$ 上的有界变差函数. $\square$

Proof.

任取 $x \leqslant y \in [a,b]$, 则

$$\begin{aligned} h(y)-h(x) &= [g(y)-f(y)]-[g(x)-f(x)] \\ &= [g(y)-g(x)]-[f(y)-f(x)] \\ &= \bigvee_x^y(f)-[f(y)-f(x)] \\ &\geqslant |f(y)-f(x)|-[f(y)-f(x)] \geqslant 0, \end{aligned}$$

因此 h 也是单调递增函数, 从而为 $[a,b]$ 上的有界变差函数. □

注

上述等式 $f=g-h$ 称为 f 的**典范分解**.

命题

设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 如果 f 在 ξ 处连续, 则

$$g(x)=\bigvee_a^x(f)$$

也在 ξ 处连续.