Fourier级数的收敛性

徐海峰整理

August 14, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

前节提要

在前一节我们已经看到, 若 $f \in C^2[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$, 则其 Fourier 系数满足估计 $a_n = o(n^{-2})$, $b_n = o(n^{-2})$, 因而 Fourier 展开一致收敛.

在前一节我们已经看到, 若 $f \in C^2[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, 则其 Fourier 系数满足估计 $a_n = o(n^{-2})$, $b_n = o(n^{-2})$, 因而 Fourier 展开一致收敛.

本节研究一般情形下 Fourier 级数的收敛性.

Dirichlet 核

Dirichlet 核

记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

Dirichlet 核

记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

称为**Dirichlet 核**.

Dirichlet 核

记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

称为**Dirichlet 核**.

利用等式(积化和差)

$$\sin\frac{1}{2}x\cos kx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}x\right)\right]$$

Dirichlet 核

记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

称为**Dirichlet 核**.

利用等式(积化和差)

$$\sin \frac{1}{2}x \cos kx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}x\right)\right]$$

可以求出 Dirichlet 核的表达式如下:

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, \quad \forall\ x \neq 2k\pi.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}x\sigma_n(x) &= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\cos x + \sin\frac{1}{2}x\cos 2x + \cdots + \sin\frac{1}{2}x\cos nx \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left[\sin(1+\frac{1}{2})x - \sin(1-\frac{1}{2})x\right] + \frac{1}{2}\left[\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x\right] + \cdots + \frac{1}{2}\left[\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x\right] \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x.
\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}x\sigma_n(x) &= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\cos x + \sin\frac{1}{2}x\cos 2x + \cdots + \sin\frac{1}{2}x\cos nx \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\Big[\sin(1+\frac{1}{2})x - \sin(1-\frac{1}{2})x\Big] + \frac{1}{2}\Big[\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[\sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x\Big] + \cdots + \frac{1}{2}\Big[\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x.
\end{aligned}$$

因此, 当 $x \neq 2k\pi$ 时,

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}x\sigma_n(x) &= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\cos x + \sin\frac{1}{2}x\cos 2x + \cdots + \sin\frac{1}{2}x\cos nx \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left[\sin(1+\frac{1}{2})x - \sin(1-\frac{1}{2})x\right] + \frac{1}{2}\left[\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x\right] + \cdots + \frac{1}{2}\left[\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x\right] \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x.
\end{aligned}
$$

因此, 当 $x \neq 2k\pi$ 时,

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

显然,

$$\sigma_n(x+2\pi) = \sigma_n(x).$$

□

Dirichlet 核

$$\lim_{x\to 2k\pi}\sigma_n(x)=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{(n+\frac{1}{2})\cos(n+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{1}{2}x}=n+\frac{1}{2},$$

Dirichlet 核

$$\lim_{x\to 2k\pi}\sigma_n(x)=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{(n+\frac{1}{2})\cos(n+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{1}{2}x}=n+\frac{1}{2},$$

因此, 当 $x=2k\pi$ 时, 规定 $\sigma_n(x)=n+\frac{1}{2}$. 从而 σ_n 为连续函数.

Dirichlet 核

$$\lim_{x\to 2k\pi}\sigma_n(x)=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{(n+\frac{1}{2})\cos(n+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{1}{2}x}=n+\frac{1}{2},$$

因此, 当 $x=2k\pi$ 时, 规定 $\sigma_n(x)=n+\frac{1}{2}$. 从而 σ_n 为连续函数.

易见 Dirichlet 核在 $[0,\pi]$ 上的积分为 $\frac{\pi}{2}$.

Dirichlet 核

$$\lim_{x\to 2k\pi}\sigma_n(x)=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 2k\pi}\frac{(n+\frac{1}{2})\cos(n+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{1}{2}x}=n+\frac{1}{2},$$

因此, 当 $x=2k\pi$ 时, 规定 $\sigma_n(x)=n+\frac{1}{2}$. 从而 σ_n 为连续函数.

易见 Dirichlet 核在 $[0,\pi]$ 上的积分为 $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\Big(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\Big)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

Dirichlet 核的用处

函数 Fourier 展开的部分和

记 f 的 Fourier 展开的部分和为 $S_n(x)$, 即

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

函数 Fourier 展开的部分和

记 f 的 Fourier 展开的部分和为 $S_n(x)$, 即

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

则可用 f 与 Dirichlet 核乘积的积分表示 $S_n(x)$.

函数 Fourier 展开的部分和

记 f 的 Fourier 展开的部分和为 $S_n(x)$, 即

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

则可用 f 与 Dirichlet 核乘积的积分表示 $S_n(x)$.

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt \cos kx \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt \sin kx \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]\mathrm{d}t \\
&\overset{u=t-x}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

$\square$

上面最后一个等号利用了被积函数的周期性, 即在 $[-\pi - x, \pi - x]$ 上的积分等于在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分.

上面最后一个等号利用了被积函数的周期性, 即在 $[-\pi-x,\pi-x]$ 上的积分等于在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分.注意 $\sigma_n(x)$ 是偶函数, 可以进一步得到

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

上面最后一个等号利用了被积函数的周期性, 即在 $[-\pi - x, \pi - x]$ 上的积分等于在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分.注意 $\sigma_n(x)$ 是偶函数, 可以进一步得到

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

Proof.

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u + \int_0^{\pi} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u\right]\end{aligned}$$

其中第一个积分中令 $v=-u$,

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u = \int_{\pi}^{0} f(x-v)\sigma_n(-v)(-1)\mathrm{d}v = \int_0^{\pi} f(x-v)\sigma_n(v)\mathrm{d}v.$$

□

Proof.

从而

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x-u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x-u)+f(x+u))\sigma_n(u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x-u)+f(x+u)}{2}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

□

续

任给 $\delta > 0$, 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u \\ +\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u \\ = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

任给 $\delta>0$, 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n(x)&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

因此, $S_n(x)$ 的收敛性只和 f 在 x 附近的性态有关, 这是 Riemann 的发现, 有时称为 **Riemann 局部化原理**.

定理 (Dini 判别法)

设 f 如前, 如果存在 $\delta > 0$, 使得

- f 在 x 处的右极限 $f(x+0)$ 和左极限 $f(x-0)$ 存在;
- 积分 $\int_0^\delta \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\mathrm{d}u$, $\int_0^\delta \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\mathrm{d}u$ 绝对收敛;

则 f 的 *Fourier* 展开在点 x 处收敛于值 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

定理 (Dirichlet)

设 f 是一个周期为 2π 的分段可导函数, 则对任意的 $x \in [-\pi, \pi]$, f 的 *Fourier* 展开在 x 处收敛到 $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

定理 (Dirichlet)

设 f 是一个周期为 2π 的分段可导函数, 则对任意的 $x \in [-\pi, \pi]$, f 的 *Fourier* 展开在 x 处收敛到 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

这里分段可导函数是这样定义的.

定理 (Dirichlet)

设 f 是一个周期为 2π 的分段可导函数, 则对任意的 $x \in [-\pi, \pi]$, f 的 *Fourier* 展开在 x 处收敛到 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

这里分段可导函数是这样定义的.

定义

设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, 若存在 $[a, b]$ 的分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, 使得在每个小区间 $[t_{i-1}, t_i](i = 1, 2, \ldots, m)$上定义的函数

$$f_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}+0), & x = t_{i-1}, \\ f(x), & x \in (t_{i-1}, t_i), \\ f(t_i - 0), & x = t_i, \end{cases}$$

都是 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的可导函数, 则称 f 是**分段可导函数**.

Dirichlet定理的证明.

Dirichlet定理的证明.

Proof.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u+\frac{1}{2}f(x+0)\\
&\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u+\frac{1}{2}f(x-0)\\
&= \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].
\end{aligned}
$$

Dirichlet定理的证明.

Proof.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u + \frac{1}{2}f(x+0) \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u + \frac{1}{2}f(x-0) \\
&= \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].
\end{aligned}$$

倒数第二个等号是利用了Dirichlet核在 $[0,\pi]$ 上的积分为 $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u = \frac{f(x+0)}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u = \frac{f(x+0)}{2}.$$

□

续

最后一个等号用到了 Riemann-Lebesgue 引理.

续

最后一个等号用到了 Riemann-Lebesgue 引理.由于 f 分段可导, 故

$$\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}} \quad \text{和} \quad \frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

关于 u 是分段连续(可积)的, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.

续

最后一个等号用到了 Riemann-Lebesgue 引理.由于 f 分段可导, 故

$$\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}} \quad \text{和} \quad \frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

关于 u 是分段连续(可积)的, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.

注

分段可导的条件只是用来保证 Riemann-Lebesgue 引理可以应用, 从证明过程即可看出, 如果 f 在 x 附近满足 α $(0<\alpha\leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件, 则定理结论仍然成立.

Hölder 条件

定义

设 f 是定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一个函数, $\alpha \in (0,1]$, $x, y \in I$. 称 f 在 y 点附近($B(y,\varepsilon)$) 满足 α 阶 Hölder 条件, 如果存在依赖于 y 的正数 $A(y)$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A(y)|x - y|^{\alpha}$$

对所有 $x \in B(y,\varepsilon)$ 都成立. 也称 f 在 y 处 α 阶 Hölder 连续.

Hölder 条件

定义

设 f 是定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一个函数, $\alpha \in (0,1]$, $x, y \in I$. 称 f 在 y 点附近($B(y,\varepsilon)$) 满足 α 阶 Hölder 条件, 如果存在依赖于 y 的正数 $A(y)$, 使得

$$|f(x)-f(y)| \leqslant A(y)|x-y|^{\alpha}$$

对所有 $x \in B(y,\varepsilon)$ 都成立. 也称 f 在 y 处 α 阶 Hölder 连续.

定义

若 f 在子集 $E \subset I$ 的每一点都是 α 阶 Hölder 连续, 则称 f 在 E 上是 α 阶 Hölder 连续的.

Hölder 条件

定义

设 f 是定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一个函数, $\alpha \in (0,1]$, $x, y \in I$. 称 f 在 y 点附近($B(y,\varepsilon)$)满足 α 阶 Hölder 条件, 如果存在依赖于 y 的正数 $A(y)$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A(y)|x - y|^{\alpha}$$

对所有 $x \in B(y,\varepsilon)$ 都成立. 也称 f 在 y 处 α 阶 Hölder 连续.

定义

若 f 在子集 $E \subset I$ 的每一点都是 α 阶 Hölder 连续, 则称 f 在 E 上是 α 阶 Hölder 连续的.若 $A = \sup_{y\in E} A(y) < \infty$, 则称 f 在 E 上一致满足 α 阶 Hölder 条件, 或一致 α 阶 Hölder 连续.

Hölder 条件

定义

设 f 是定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一个函数, $\alpha \in (0,1]$, $x, y \in I$. 称 f 在 y 点附近($B(y,\varepsilon)$) 满足 α 阶 Hölder 条件, 如果存在依赖于 y 的正数 $A(y)$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A(y)|x-y|^{\alpha}$$

对所有 $x \in B(y,\varepsilon)$ 都成立. 也称 f 在 y 处 α 阶 Hölder 连续.

定义

若 f 在子集 $E \subset I$ 的每一点都是 α 阶 Hölder 连续, 则称 f 在 E 上是 α 阶 Hölder 连续的.若 $A = \sup_{y \in E} A(y) < \infty$, 则称 f 在 E 上一致满足 α 阶 Hölder 条件, 或一致 α 阶 Hölder 连续.称 A 是 f 在 E 上的 Hölder 系数.