



Fourier 分析

徐海峰整理

June 18, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

其他参考文献.

Fourier 级数

定义

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

称为三角函数系. 记为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

定义

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

称为三角函数系. 记为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

可以证明

定义

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

称为三角函数系. 记为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

可以证明

命题

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0,$$

定义

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

称为三角函数系. 记为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

可以证明

命题

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0,$$

此即三角函数系的正交性.

正交性的证明

Proof.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left(\frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

正交性的证明

Proof.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left(\frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

正交性的证明

Proof.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left(\frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

由积化和差公式,

$$2 \cos nx \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(n-m)x,$$

正交性的证明

Proof.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left(\frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

由积化和差公式,

$$2 \cos nx \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(n-m)x,$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0.$$

正交性的证明

Proof.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left(\frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

由积化和差公式,

$$2 \cos nx \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(n-m)x,$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0.$$

□

Proof.

同理,

$$2 \sin nx \sin mx = \cos(n - m)x - \cos(n + m)x,$$

Proof.

同理,

$$2 \sin nx \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x,$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx = 0.$$

Proof.

同理,

$$2 \sin nx \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x,$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx = 0.$$

因

$$2 \sin nx \cos mx = \sin(n+m)x + \sin(n-m)x,$$

Proof.

同理,

$$2 \sin nx \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x,$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx = 0.$$

因

$$2 \sin nx \cos mx = \sin(n+m)x + \sin(n-m)x,$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx = 0.$$



Proof.

此外,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

Proof.

此外,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi,$$

Proof.

此外,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi.$$



定义

称

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

为三角多项式,

定义

称

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

为三角多项式,

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

为三角级数.

定义

设 $f(x)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的 Riemann 可积或广义绝对可积的函数（即有瑕点但瑕积分绝对收敛的函数），

定义

设 $f(x)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的 Riemann 可积或广义绝对可积的函数（即有瑕点但瑕积分绝对收敛的函数），令

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

称 a_0, a_k, b_k 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 称

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

为函数 $f(x)$ 的 **Fourier 级数**或 **Fourier 展开**. 记

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

如果 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 一致收敛,

如果 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 一致收敛,则由逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = a_0 \pi.$$

如果 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 一致收敛,则由逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = a_0 \pi.$$

同理,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx \right) \\ &= 0 + a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx + 0 \\ &= a_k \pi, \end{aligned}$$

类似的,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx \right) \\ &= 0 + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx + 0 \\ &= b_k \pi.\end{aligned}$$

类似的,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx \right) \\ &= 0 + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx + 0 \\ &= b_k \pi.\end{aligned}$$

这就是为什么我们要像前面那样定义 Fourier 系数.

对于 2π 周期函数, 定义其 Fourier 系数时可以在长度为 2π 的任意区间上积分.

对于 2π 周期函数, 定义其 Fourier 系数时可以在长度为 2π 的任意区间上积分.

如果 f 为奇函数, 则 $a_0 = 0$, 且 $f(x) \cos kx$ 也是奇函数,

对于 2π 周期函数, 定义其 Fourier 系数时可以在长度为 2π 的任意区间上积分.

如果 f 为奇函数, 则 $a_0 = 0$, 且 $f(x) \cos kx$ 也是奇函数, 从而

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0,$$

对于 2π 周期函数, 定义其 Fourier 系数时可以在长度为 2π 的任意区间上积分.

如果 f 为奇函数, 则 $a_0 = 0$, 且 $f(x) \cos kx$ 也是奇函数, 从而

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0,$$

此时的 Fourier 展开

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

称为正弦级数.

如果 f 为偶函数, 则 $f(x) \sin kx$ 是奇函数,

如果 f 为偶函数, 则 $f(x) \sin kx$ 是奇函数, 从而

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0,$$

如果 f 为偶函数, 则 $f(x) \sin kx$ 是奇函数, 从而

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0,$$

此时的 Fourier 展开

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

称为余弦级数.

Riemann-Lebesgue 定理

定理

设 f 在 $[a, b]$ 上 *Riemann* 可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Riemann-Lebesgue 定理

定理

设 f 在 $[a, b]$ 上 *Riemann* 可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, *Riemann* 可积函数 f 可用阶梯函数逼近. 对于广义绝对可积函数, 可以用可积函数去逼近.

Riemann-Lebesgue 定理

定理

设 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积或广义绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, Riemann 可积函数 f 可用阶梯函数逼近. 对于广义绝对可积函数, 可以用可积函数去逼近.

首先我们假设 $f \in R[a, b]$, 即 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数, 则存在阶梯函数 g , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Proof.

此时,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon. \quad (*)$$

Proof.

此时,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon. \quad (*)$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可,

Proof.

此时,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon. \quad (*)$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可, 进而只要对 $[c, d] \subset [a, b]$ 上的常值函数证明即可:

Proof.

此时,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon. \quad (*)$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可, 进而只要对 $[c, d] \subset [a, b]$ 上的常值函数证明即可:

如果 $f = \mu$, 则

$$\left| \int_c^d \mu \cos \lambda x dx \right| = \left| \mu \frac{1}{\lambda} (\sin \lambda d - \sin \lambda c) \right| \leq \frac{2|\mu|}{\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow +\infty).$$

Proof.

此时,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon. \quad (*)$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可, 进而只要对 $[c, d] \subset [a, b]$ 上的常值函数证明即可:

如果 $f = \mu$, 则

$$\left| \int_c^d \mu \cos \lambda x dx \right| = \left| \mu \frac{1}{\lambda} (\sin \lambda d - \sin \lambda c) \right| \leq \frac{2|\mu|}{\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow +\infty).$$

对 $\sin \lambda x$ 的证明完全类似. □

Proof.

若 f 是 $[a, b]$ 上的广义绝对可积函数, 可以重复上面的证明过程, 或利用 Riemann 可积函数的已有结论.

Proof.

若 f 是 $[a, b]$ 上的广义绝对可积函数, 可以重复上面的证明过程, 或利用 Riemann 可积函数的已有结论.

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in R[a, b]$ 使得 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$.

Proof.

若 f 是 $[a, b]$ 上的广义绝对可积函数, 可以重复上面的证明过程, 或利用 Riemann 可积函数的已有结论.

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in R[a, b]$ 使得 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$. 根据 (*),

$$\int_a^b g(x) \cos \lambda x dx - \varepsilon < \int_a^b f(x) \cos \lambda x < \int_a^b g(x) \cos \lambda x + \varepsilon,$$

Proof.

若 f 是 $[a, b]$ 上的广义绝对可积函数, 可以重复上面的证明过程, 或利用 Riemann 可积函数的已有结论.

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in R[a, b]$ 使得 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$. 根据 (*),

$$\int_a^b g(x) \cos \lambda x dx - \varepsilon < \int_a^b f(x) \cos \lambda x < \int_a^b g(x) \cos \lambda x + \varepsilon,$$

由 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos \lambda x = 0$ 推出

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x = 0.$$



推论

设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上 *Riemann* 可积或广义绝对可积, 则其 *Fourier* 系数 $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$).

推论

设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上 *Riemann* 可积或广义绝对可积, 则其 *Fourier* 系数 $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$).

Proof.

对于 $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

推论

设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上 *Riemann* 可积或广义绝对可积, 则其 *Fourier* 系数 $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$).

Proof.

对于 $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

推论

设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上 *Riemann* 可积或广义绝对可积, 则其 *Fourier* 系数 $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$).

Proof.

对于 $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

应用 *Riemann-Lebesgue* 定理, 知 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

推论

设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上 *Riemann* 可积或广义绝对可积, 则其 *Fourier* 系数 $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$).

Proof.

对于 $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

应用 Riemann-Lebesgue 定理, 知 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. 同理, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. □

Fourier 系数的估计

如果 f 有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计.

Fourier 系数的估计

如果 f 有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计.

例如, 设 $f \in C^1([-\pi, \pi])$, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{-1}{n} \cos nx\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

Fourier 系数的估计

如果 f 有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计.

例如, 设 $f \in C^1([-\pi, \pi])$, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{-1}{n} \cos nx\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

最后一个等号应用了 Riemann-Lebesgue 定理, 注意 $f'(x)$ 连续.

Fourier 系数的估计

如果 f 有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计.

例如, 设 $f \in C^1([-\pi, \pi])$, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{-1}{n} \cos nx\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

最后一个等号应用了 Riemann-Lebesgue 定理, 注意 $f'(x)$ 连续.

同理可证 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{1}{n} \sin nx\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{1}{n} \sin nx\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

一般地, 设 $f \in C^k([-\pi, \pi])$, 且 $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$ ($0 \leq i \leq k-1$), 则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{1}{n} \sin nx\right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \right] \\
 &= -\frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann-Lebesgue})
 \end{aligned}$$

一般地, 设 $f \in C^k([-\pi, \pi])$, 且 $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$ ($0 \leq i \leq k-1$), 则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

见问题3263.

习题

证明, 三角多项式的 Fourier 展开就是它自己.

习题

证明, 三角多项式的 Fourier 展开就是它自己.

见问题3264.

欢迎访问 atzjg.net

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.

欢迎访问 atzjg.net