函数的连续性和间断点

徐海峰整理

September 22, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

函数连续的概念

连续

定义

若 f 在 x_0 的某个邻域内有定义且 f 在 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f **在** x_0 **处连续**, x_0 称为 f **的一个连续点**.

连续

定义

若 f 在 x_0 的某个邻域内有定义且 f 在 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f **在** x_0 **处连续**, x_0 称为 f 的**一个连续点**.

若 f 在 x_0 处的左极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 **处左连续**;

连续

定义

若 f 在 x_0 的某个邻域内有定义且 f 在 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f **在** x_0 **处连续**, x_0 称为 f **的一个连续点**.

若 f 在 x_0 处的左极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 **处左连续**;

若 f 在 x_0 处的右极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 **处右连续**.

连续

定义

若 f 在 x_0 的某个邻域内有定义且 f 在 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f **在** x_0 **处连续**, x_0 称为 f 的**一个连续点**.

若 f 在 x_0 处的左极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处**左连续**;

若 f 在 x_0 处的右极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处**右连续**.

在定义域内每一点都连续的函数被称为**连续函数**.

定义

若 f 在 x_0 的某个邻域内有定义且 f 在 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f **在** x_0 **处连续**, x_0 称为 f **的一个连续点**.

若 f 在 x_0 处的左极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 **处左连续**;

若 f 在 x_0 处的右极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 **处右连续**.

在定义域内每一点都连续的函数被称为**连续函数**.

注

- 若 x_0 不是 f 的连续点（注意, x_0 可以不在 f 的定义域内）, 则称 x_0 是 f 的**一个间断点**.

定义

若 f 在 x_0 的某个邻域内有定义且 f 在 x_0 处的极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f **在** x_0 **处连续**, x_0 称为 f **的一个连续点**.

若 f 在 x_0 处的左极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 **处左连续**;
若 f 在 x_0 处的右极限等于 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 **处右连续**.

在定义域内每一点都连续的函数被称为**连续函数**.

注

- 若 x_0 不是 f 的连续点（注意, x_0 可以不在 f 的定义域内）, 则称 x_0 是 f **的一个间断点**.
- 显然, $f(x)$ 在 x_0 处连续当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 处左连续且右连续.

例子

根据前面的计算，常值函数，x，x^n，$\sqrt{x}$，$\sin x$，$\cos x$，a^x，$\log_a x$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 都是定义域上的连续函数.

例子

根据前面的计算，常值函数，x，x^n，$\sqrt{x}$，$\sin x$，$\cos x$，a^x，$\log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 都是定义域上的连续函数.

- 0 是函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点，原因是 $f(x)$ 在 0 处没有定义.

例子

根据前面的计算, 常值函数, x, x^n, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 都是定义域上的连续函数.

- 0 是函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点, 原因是 $f(x)$ 在 0 处没有定义.
- 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不连续. 虽然 $sgn(x)$ 在 0 处有定义, 它在 0 的左极限和右极限也都存在, 但不相等.

例子

根据前面的计算, 常值函数, x, x^n, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 都是定义域上的连续函数.

- 0 是函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点, 原因是 $f(x)$ 在 0 处没有定义.
- 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不连续. 虽然 $sgn(x)$ 在 0 处有定义, 它在 0 的左极限和右极限也都存在, 但不相等.
- $y = [x]$ 在非整数点处连续; 在 $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ 处右连续, 但非左连续. 即

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1, \quad \lim_{x \to n^+} [x] = n.$$

故所有整数都是函数 $[x]$ 的间断点.

例子

根据前面的计算, 常值函数, x, x^n, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 都是定义域上的连续函数.

- 0 是函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点, 原因是 $f(x)$ 在 0 处没有定义.
- 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不连续. 虽然 $sgn(x)$ 在 0 处有定义, 它在 0 的左极限和右极限也都存在, 但不相等.
- $y = [x]$ 在非整数点处连续; 在 $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ 处右连续, 但非左连续. 即

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1, \qquad \lim_{x \to n^+} [x] = n.$$

  故所有整数都是函数 $[x]$ 的间断点.
- 由于 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, 故 0 也是函数 $\ln x$ 的间断点.

间断点的分类

定义

设 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0 - 0)$ 和右极限 $f(x_0 + 0)$ 都存在且有限, 则称 x_0 为**第一类间断点**; 其它的间断点都称为**第二类间断点**.

间断点的分类

定义

设 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在且有限, 则称 x_0 为**第一类间断点**; 其它的间断点都称为**第二类间断点**.

第一类间断点中左极限和右极限相等的称为**可去间断点**; 不相等的被称为**跳跃间断点**.

间断点的分类

定义

设 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在且有限, 则称 x_0 为**第一类间断点**; 其它的间断点都称为**第二类间断点**.

第一类间断点中左极限和右极限相等的称为**可去间断点**; 不相等的被称为**跳跃间断点**.

注

第二类间断点是指左、右极限至少有一个不存在的点. 若左极限（或右极限）为无穷, 则称此间断点为**无穷间断点**; 若左极限（或右极限）类似于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, 则称此间断点为**振荡间断点**.

间断点分类举例

例

- 0 是 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 只需补充定义 $f(0) = 1$, 即使得 $f(x)$ 在 0 处连续;

间断点分类举例

例

- 0 是 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 只需补充定义 $f(0) = 1$, 即使得 $f(x)$ 在 0 处连续;
- 0 是符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 的跳跃间断点; 任意整数是取整函数 $[x]$ 的跳跃间断点;

间断点分类举例

例

- 0 是 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 只需补充定义 $f(0) = 1$, 即使得 $f(x)$ 在 0 处连续;
- 0 是符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 的跳跃间断点; 任意整数是取整函数 $[x]$ 的跳跃间断点;
- $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是 $\tan x$ 的无穷间断点;

例

- 0 是 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 只需补充定义 $f(0) = 1$, 即使得 $f(x)$ 在 0 处连续;
- 0 是符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 的跳跃间断点; 任意整数是取整函数 $[x]$ 的跳跃间断点;
- $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ 是 $\tan x$ 的无穷间断点;
- 0 是 $\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

开集

定义 (内点)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{A}$, 则称 x 是 A 的**一个内点**.

开集

定义 (内点)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{A}$, 则称 x 是 A 的**一个内点**.

定义 (开集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, 若 A 中每个点都是 A 的内点, 则称 A 是 $\mathbb{R}$ 中的**一个开集**.

开集

定义 (内点)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{A}$, 则称 x 是 A 的一个内点.

定义 (开集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, 若 A 中每个点都是 A 的内点, 则称 A 是 $\mathbb{R}$ 中的一个开集.

定义 (补集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, A 的补集是指 $\mathbb{R} \setminus A$, 记之为 A^c.

开集

定义 (内点)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{A}$, 则称 x 是 A 的**一个内点**.

定义 (开集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, 若 A 中每个点都是 A 的内点, 则称 A 是 $\mathbb{R}$ 中的**一个开集**.

定义 (补集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, A 的补集是指 $\mathbb{R} \setminus A$, 记之为 A^c.

定义 (闭集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, 若 A^c 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 则称 A 是 $\mathbb{R}$ 中的**一个闭集**.

开集

定义 (内点)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{A}$, 则称 x 是 A 的**一个内点**.

定义 (开集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, 若 A 中每个点都是 A 的内点, 则称 A 是 $\mathbb{R}$ 中的**一个开集**.

定义 (补集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, A 的补集是指 $\mathbb{R} \setminus A$, 记之为 A^c.

定义 (闭集)

设 $A \subset \mathbb{R}$, 若 A^c 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 则称 A 是 $\mathbb{R}$ 中的**一个闭集**.

定义

设 $A \subset \mathbb{R}$, 由 A 的所有内点构成的集合称为 A 的内部, 记为 $\mathring{A}$.

约定: 空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

约定: 空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

于是, 根据定义, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 也是闭集.

约定: 空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

于是, 根据定义, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 也是闭集.

易见,

命题

$A \subset \mathbb{R}$ 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$.

约定: 空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

于是, 根据定义, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 也是闭集.

易见,

命题

$A \subset \mathbb{R}$ 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$.

例

所有的开区间都是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

设区间 $I = [a, b]$, I 的内部 $\mathring{I} = (a, b)$.

约定: 空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

于是, 根据定义, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 也是闭集.

易见,

命题

$A \subset \mathbb{R}$ 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$.

例

所有的开区间都是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

设区间 $I = [a, b]$, I 的内部 $\mathring{I} = (a, b)$.

区间 I 内, 是指在 (a, b) 上(或内), 此时不包括端点 a 和 b.

约定: 空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

于是, 根据定义, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 也是闭集.

易见,

命题

$A \subset \mathbb{R}$ 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$.

例

所有的开区间都是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

设区间 $I = [a, b]$, I 的内部 $\mathring{I} = (a, b)$.

区间 I 内, 是指在 (a, b) 上(或内), 此时不包括端点 a 和 b.

函数 f 在区间 I **内**连续, 是指在区间 (a, b) 上(或内)每一点都连续.

约定: 空集 $\emptyset$ 既是开集又是闭集.

于是, 根据定义, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 也是闭集.

易见,

命题

$A \subset \mathbb{R}$ 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$.

例

所有的开区间都是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

设区间 $I = [a, b]$, I 的内部 $\mathring{I} = (a, b)$.

区间 I 内, 是指在 (a, b) 上(或内), 此时不包括端点 a 和 b.

函数 f 在区间 I **内**连续, 是指在区间 (a, b) 上(或内)每一点都连续.

称函数 f 在区间 $I = [a, b]$ **上**连续, 如果 f 在区间 (a, b) 上(或内)连续, 并且连续到边界, 即在点 a 处右连续, 在点 b 处左连续.

半连续

定义连续时, 若只在 x_0 的左（右）邻域中考虑, 则得到左（右）连续的概念.

半连续

定义连续时, 若只在 x_0 的左（右）邻域中考虑, 则得到左（右）连续的概念.

类似的想法, 改造一下定义, 考虑 x_0 的某个开邻域, 原先要求 $|f(x) - f(x_0)|$ 小于任意给定的正数 ε,

半连续

定义连续时, 若只在 x_0 的左（右）邻域中考虑, 则得到左（右）连续的概念.

类似的想法, 改造一下定义, 考虑 x_0 的某个开邻域, 原先要求 $|f(x)-f(x_0)|$ 小于任意给定的正数 ε,即

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

半连续

定义连续时, 若只在 x_0 的左（右）邻域中考虑, 则得到左（右）连续的概念.

类似的想法, 改造一下定义, 考虑 x_0 的某个开邻域, 原先要求 $|f(x) - f(x_0)|$ 小于任意给定的正数 ε,即

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

改为只有一侧不等式成立, 则就有了相应的下半连续和上半连续的概念.

半连续

定义连续时, 若只在 x_0 的左（右）邻域中考虑, 则得到左（右）连续的概念.

类似的想法, 改造一下定义, 考虑 x_0 的某个开邻域, 原先要求 $|f(x) - f(x_0)|$ 小于任意给定的正数 ε,即

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

改为只有一侧不等式成立, 则就有了相应的下半连续和上半连续的概念.

半连续

定义 (下半连续)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处下半连续.

半连续

定义 (下半连续)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处下半连续.

定义 (上半连续)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处上半连续.

一些例子

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

由于

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)|,$$

故任给 $\varepsilon > 0$, 取上面的 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t., 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

由于

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)|,$$

故任给 $\varepsilon>0$, 取上面的 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 总有

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{x\to}|f(x)|=|f(x_0)|$. 因此 $|f(x)|$ 也是连续函数. $\square$

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

由于

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)|,$$

故任给 $\varepsilon > 0$, 取上面的 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{x\to} |f(x)| = |f(x_0)|$. 因此 $|f(x)|$ 也是连续函数. $\square$

使用夹逼原理也可以证明.

首先, 我们证明下面显见的结论.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.

首先, 我们证明下面显见的结论.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

首先, 我们证明下面显见的结论.

例

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ 当且仅当 $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.

Proof.

设 $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$,采用 $\varepsilon - \delta$ 语言, 即$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.

首先, 我们证明下面显见的结论.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,采用 $\varepsilon - \delta$ 语言, 即$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.

注意到 $|g(x) - 0| = \big||g(x)| - 0\big|$,

首先, 我们证明下面显见的结论.

例

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)|=0$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,采用 $\varepsilon-\delta$ 语言, 即$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|g(x)-0|<\varepsilon$.

注意到 $|g(x)-0|=\big||g(x)|-0\big|$,因此上面的 $\varepsilon-\delta$ 语言等价为:

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $\big||g(x)|-0\big|<\varepsilon$.

首先, 我们证明下面显见的结论.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,采用 $\varepsilon - \delta$ 语言, 即$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.

注意到 $|g(x) - 0| = \big||g(x)| - 0\big|$,因此上面的 $\varepsilon - \delta$ 语言等价为:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $\big||g(x)| - 0\big| < \varepsilon$.

这说明 $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.

首先, 我们证明下面显见的结论.

例

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = 0$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,采用 $\varepsilon - \delta$ 语言, 即$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.

注意到 $|g(x) - 0| = \big||g(x)| - 0\big|$,因此上面的 $\varepsilon - \delta$ 语言等价为:

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $\big||g(x)| - 0\big| < \varepsilon$.

这说明 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = 0$.反之也成立. $\square$

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.使用 $\varepsilon - \delta$ 语言, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, 即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.使用 $\varepsilon - \delta$ 语言, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若令 $g(x) := f(x) - f(x_0)$, 则上面的论述记为: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, 即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.使用 $\varepsilon - \delta$ 语言, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若令 $g(x) := f(x) - f(x_0)$, 则上面的论述记为: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.此说明 $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.使用 $\varepsilon - \delta$ 语言, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若令 $g(x) := f(x) - f(x_0)$, 则上面的论述记为: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.此说明 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

从而等价于 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = 0$.

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, 即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.使用 $\varepsilon - \delta$ 语言, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若令 $g(x) := f(x) - f(x_0)$, 则上面的论述记为: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.此说明 $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

从而等价于 $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.现在

$$0 \leqslant \big| |f(x)| - |f(x_0)| \big| \leqslant |f(x) - f(x_0)| = |g(x)|,$$

例

若 f 为连续函数, 则 $|f|$ 也是连续函数.

Proof.

设 f 在点 x_0 处连续, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.使用 $\varepsilon - \delta$ 语言, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若令 $g(x) := f(x) - f(x_0)$, 则上面的论述记为: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - 0| < \varepsilon$.此说明 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

从而等价于 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = 0$.现在

$$0 \leqslant \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)| = |g(x)|,$$

因此根据夹逼原理, 知

$$\lim_{x\to x_0} \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| = 0.$$

$\square$

Proof.

这等价于

$$\lim_{x \to x_0} \left(|f(x)| - |f(x_0)| \right) = 0.$$

Proof.

这等价于

$$\lim_{x \to x_0} \left(|f(x)| - |f(x_0)| \right) = 0.$$

而这又等价于

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

即 $|f|$ 在 x_0 也连续. □

例

研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$ 的连续性.

例

研究函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$ 的连续性.

解. 设 $x_0 > 0$.

例

研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$ 的连续性.

解. 设 $x_0>0.\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\min\{\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\}$,

例

研究函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$ 的连续性.

解. 设 $x_0 > 0$.$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \min\{\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\}$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $x > x_0 - \delta \geqslant \frac{1}{2}x_0$,

例

研究函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$ 的连续性.

解. 设 $x_0 > 0. \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \min\{\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\}$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $x > x_0 - \delta \geqslant \frac{1}{2}x_0$,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < \frac{\delta}{\left|\frac{1}{2}x_0 \cdot x_0\right|} \leqslant \varepsilon.$$

例

研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 的连续性.

解. 设 $x_0>0.\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\min\{\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\}$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $x>x_0-\delta\geqslant\frac{1}{2}x_0$,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{\delta}{\left|\frac{1}{2}x_0\cdot x_0\right|}\leqslant\varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x_0}$.

例

研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$ 的连续性.

解. 设 $x_0>0.\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\min\{\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\}$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $x>x_0-\delta\geqslant\frac{1}{2}x_0$,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{\delta}{\left|\frac{1}{2}x_0\cdot x_0\right|}\leqslant\varepsilon.$$

这说明 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}$.

因此函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在定义域内连续, 即 $\dfrac{1}{x}$ 是 $\mathbb{R}^*$ 上的连续函数. ∎

连续函数的四则运算

连续函数的四则运算

定理

设 $f(x)$, $g(x)$ 都在 x_0 处连续, 则

1. $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 x_0 处连续, 其中 α, β 为常数;
2. $f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续;
3. 当 $g(x_0)\neq 0$ 时, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处连续.

定理

设 $f(x)$, $g(x)$ 都在 x_0 处连续, 则

1. $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 x_0 处连续, 其中 α, β 为常数;
2. $f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续;
3. 当 $g(x_0)\neq 0$ 时, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处连续.

Proof.

由极限的四则运算性质即可得到. $\square$

连续函数的例子

例

若 f, g 为连续函数, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数.

例

若 f, g 为连续函数, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数.

Proof.

当 f, g 连续时, $f + g$, $f - g$ 均连续.

例

若 f, g 为连续函数, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数.

Proof.

当 f, g 连续时, $f+g, f-g$ 均连续.又前面已证 f 连续推出 $|f|$ 连续.

例

若 f, g 为连续函数, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均为连续函数.

Proof.

当 f, g 连续时, $f+g$, $f-g$ 均连续.又前面已证 f 连续推出 $|f|$ 连续.因此

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{(f+g) + |f-g|\}, \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\{(f+g) - |f-g|\}$$

都是连续函数. □

有理函数的连续性

当 n 为正整数时, x^n 的连续性已经(通过定义)证明,

有理函数的连续性

当 n 为正整数时, x^n 的连续性已经(通过定义)证明,也可以根据连续函数的四则运算, 从 $y = x$ 连续, 推出 $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, $\ldots$, $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}$ 都是连续函数.

有理函数的连续性

当 n 为正整数时, x^n 的连续性已经(通过定义)证明,也可以根据连续函数的四则运算, 从 $y = x$ 连续, 推出 $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, $\ldots$, $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}$ 都是连续函数.

又已证 x^{-1} 连续, 从而当 n 为负整数时, x^n 也是连续函数.

有理函数的连续性

当 n 为正整数时, x^n 的连续性已经(通过定义)证明,也可以根据连续函数的四则运算,从 $y = x$ 连续, 推出 $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, ..., $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}$ 都是连续函数.

又已证 x^{-1} 连续, 从而当 n 为负整数时, x^n 也是连续函数.

进一步, 由连续函数的四则运算, **有理函数**(即两个多项式之商)在定义域内均为连续函数.

三角函数的连续性

因为 $\sin x$, $\cos x$ 为连续函数, 故三角函数

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

在定义域内均为连续函数.

复合函数的连续性

定理

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续, 函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(y_0),$$

特别地, 当 g 在 x_0 处连续, 复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处也连续.

定理

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续, 函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 则有

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(y_0),$$

特别地, 当 g 在 x_0 处连续, 复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处也连续.

Proof.

因为 $f(y)$ 在 y_0 处连续,

复合函数的连续性

定理

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续, 函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(y_0),$$

特别地, 当 g 在 x_0 处连续, 复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处也连续.

Proof.

因为 $f(y)$ 在 y_0 处连续,故对任取的 $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta$ 时,

$$|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

定理

设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续, 函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 则有

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(y_0),$$

特别地, 当 g 在 x_0 处连续, 复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处也连续.

Proof.

因为 $f(y)$ 在 y_0 处连续,故对任取的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta$ 时,

$$|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

对于此 $\delta > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, 故存在 $\eta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时,

$$|g(x) - y_0| < \delta.$$

Proof.

令 $y = g(x)$, 从而

$$|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

Proof.

令 $y = g(x)$, 从而

$$|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

即证明了 $f(g(x)) \to f(y_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$. $\square$

幂函数的连续性

例

设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的连续性.

例

设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^{\alpha}$ 的连续性.

解. 设 $\alpha > 0$.

幂函数的连续性

例

设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^{\alpha}$ 的连续性.

解. 设 $\alpha > 0$.先说明 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的连续性.

例

设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的连续性.

解. 设 $\alpha > 0$.先说明 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的连续性.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, 当 $|x| < \delta$ 时,

$$|x^\alpha - 0| = |x|^\alpha < \delta^\alpha = \varepsilon.$$

幂函数的连续性

例

设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^{\alpha}$ 的连续性.

解. 设 $\alpha > 0$.先说明 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的连续性.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, 当 $|x| < \delta$ 时,

$$|x^{\alpha} - 0| = |x|^{\alpha} < \delta^{\alpha} = \varepsilon.$$

因此, $f(x) = x^{\alpha}$ 在 $x_0 = 0$ 处连续.

幂函数的连续性

例

设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的连续性.

解. 设 $\alpha > 0$.先说明 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的连续性.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, 当 $|x| < \delta$ 时,

$$|x^\alpha - 0| = |x|^\alpha < \delta^\alpha = \varepsilon.$$

因此, $f(x) = x^\alpha$ 在 $x_0 = 0$ 处连续.

如果 $x > 0$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, 根据复合函数的连续性, 知 $f(x)$ 连续;

幂函数的连续性

例

设 $\alpha \neq 0$, 研究幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的连续性.

解. 设 $\alpha > 0$.先说明 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的连续性.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, 当 $|x| < \delta$ 时,

$$|x^\alpha - 0| = |x|^\alpha < \delta^\alpha = \varepsilon.$$

因此, $f(x) = x^\alpha$ 在 $x_0 = 0$ 处连续.

如果 $x > 0$, 则 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, 根据复合函数的连续性, 知 $f(x)$ 连续;

如果 $x < 0$, 则 $x^\alpha = (-1)^\alpha (-x)^\alpha = (-1)^\alpha e^{\alpha \ln(-x)}$, 仍由复合函数的连续性, 知 $f(x)$ 连续. ∎

续

解. 若 $\alpha < 0$, 则

$$x^\alpha = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha},$$

解. 若 $\alpha < 0$, 则

$$x^{\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha},$$

因此当 $x \neq 0$ 时函数 $f(x)$ 是连续的.

续

解. 若 $\alpha < 0$, 则

$$x^{\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha},$$

因此当 $x \neq 0$ 时函数 $f(x)$ 是连续的.总之, 在定义域内, 幂函数是连续的. ∎

单调函数的间断点

定义在区间上的单调函数其间断点必为跳跃间断点

命题

设 $f(x)$ 是区间 (a, b) 内的单调函数, $x_0 \in (a, b)$. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 是跳跃间断点.

定义在区间上的单调函数其间断点必为跳跃间断点

命题

设 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的单调函数, $x_0 \in (a,b)$. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 是跳跃间断点.

Proof.

由单调性知 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且有限(根据单调有界数列必有极限以及 Heine 定理).

定义在区间上的单调函数其间断点必为跳跃间断点

命题

设 $f(x)$ 是区间 (a, b) 内的单调函数, $x_0 \in (a, b)$. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 是跳跃间断点.

Proof.

由单调性知 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且有限(根据单调有界数列必有极限以及 Heine 定理).当 f 单调递增时, 有

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0),$$

定义在区间上的单调函数其间断点必为跳跃间断点

命题

设 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的单调函数, $x_0 \in (a,b)$. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 是跳跃间断点.

Proof.

由单调性知 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且有限(根据单调有界数列必有极限以及 Heine 定理).当 f 单调递增时, 有

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0),$$

当 f 单调递减时, 有

$$f(x_0-0) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0+0).$$

定义在区间上的单调函数其间断点必为跳跃间断点

命题

设 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的单调函数, $x_0 \in (a,b)$. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 是跳跃间断点.

Proof.

由单调性知 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且有限(根据单调有界数列必有极限以及 Heine 定理).当 f 单调递增时, 有

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0),$$

当 f 单调递减时, 有

$$f(x_0-0) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0+0).$$

因此, 如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 必为跳跃间断点. □

单调函数的间断点至多为可数个

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点为至多可数个.

单调函数的间断点至多为可数个

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点为至多可数个.

Proof.

不妨设 f 单调递增, 且 I 为开区间.

单调函数的间断点至多为可数个

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点为至多可数个.

Proof.

不妨设 f 单调递增, 且 I 为开区间.假设 $x_1 < x_2$ 为间断点, 则

$$f(x_1 - 0) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0) \leqslant f(x_2) \leqslant f(x_2 + 0).$$

单调函数的间断点至多为可数个

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点为至多可数个.

Proof.

不妨设 f 单调递增, 且 I 为开区间.假设 $x_1 < x_2$ 为间断点, 则

$$f(x_1 - 0) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0) \leqslant f(x_2) \leqslant f(x_2 + 0).$$

因此, 区间 $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$ 和 $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$ 不相交.

单调函数的间断点至多为可数个

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点为至多可数个.

Proof.

不妨设 f 单调递增, 且 I 为开区间.假设 $x_1 < x_2$ 为间断点, 则

$$f(x_1 - 0) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0) \leqslant f(x_2) \leqslant f(x_2 + 0).$$

因此, 区间 $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$ 和 $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$ 不相交.如果我们把每一个间断点 x 均对应到开区间 $(f(x - 0), f(x + 0))$, 则这些开区间互不相交.

单调函数的间断点至多为可数个

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点为至多可数个.

Proof.

不妨设 f 单调递增, 且 I 为开区间.假设 $x_1 < x_2$ 为间断点, 则

$$f(x_1-0) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_1+0) \leqslant f(x_2-0) \leqslant f(x_2) \leqslant f(x_2+0).$$

因此, 区间 $(f(x_1-0), f(x_1+0))$ 和 $(f(x_2-0), f(x_2+0))$ 不相交.如果我们把每一个间断点 x 均对应到开区间 $(f(x-0), f(x+0))$, 则这些开区间互不相交.这样的开区间只有至多可数个, 因此 $f(x)$ 的间断点也至多可数. □

严格单调函数连续的充要条件

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的严格单调函数, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

严格单调函数连续的充要条件

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的严格单调函数, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

Proof.

不妨设 $f(x)$ 严格单调递增.

严格单调函数连续的充要条件

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的严格单调函数, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

Proof.

不妨设 $f(x)$ 严格单调递增.如果 $f(I)$ 是区间, 则 $f(x)$ 没有间断点, 即推出 $f(x)$ 连续.

严格单调函数连续的充要条件

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的严格单调函数, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

Proof.

不妨设 $f(x)$ 严格单调递增.如果 $f(I)$ 是区间, 则 $f(x)$ 没有间断点, 即推出 $f(x)$ 连续.

(反证法) 假设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 $(f(x_0-0), f(x_0+0))$ 不在值域内, 从而会分割值域, 使得 $f(I)$ 不是区间.

严格单调函数连续的充要条件

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的严格单调函数, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

Proof.

不妨设 $f(x)$ 严格单调递增.如果 $f(I)$ 是区间, 则 $f(x)$ 没有间断点, 即推出 $f(x)$ 连续.

(反证法) 假设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 则 $(f(x_0-0), f(x_0+0))$ 不在值域内, 从而会分割值域, 使得 $f(I)$ 不是区间.

必要性的证明, 由下一节的介值定理可推出. □

严格单调连续函数的逆函数也是严格单调且连续的

推论

定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.

严格单调连续函数的逆函数也是严格单调且连续的

推论

定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.

Proof.

不妨设 f 在 I 上严格单调递增. 由于 f 连续, 故由上一命题知 $f(I) = J$ 是区间.

严格单调连续函数的逆函数也是严格单调且连续的

推论

定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.

Proof.

不妨设 f 在 I 上严格单调递增. 由于 f 连续, 故由上一命题知 $f(I) = J$ 是区间.因为映射 $f: I \to J$ 是一一映射, 故它是可逆的.

严格单调连续函数的逆函数也是严格单调且连续的

推论

定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.

Proof.

不妨设 f 在 I 上严格单调递增. 由于 f 连续, 故由上一命题知 $f(I)=J$ 是区间.因为映射 $f: I \to J$ 是一一映射, 故它是可逆的.

设 $y_1 < y_2 \in J$, 记 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_1 \geqslant x_2$, 则因为 f 单调递增, 故 $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, 矛盾.

严格单调连续函数的逆函数也是严格单调且连续的

推论

定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.

Proof.

不妨设 f 在 I 上严格单调递增. 由于 f 连续, 故由上一命题知 $f(I)=J$ 是区间.因为映射 $f: I \to J$ 是一一映射, 故它是可逆的.

设 $y_1 < y_2 \in J$, 记 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_1 \geqslant x_2$, 则因为 f 单调递增, 故 $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, 矛盾.这说明

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

因此 f^{-1} 是 J 上的严格单调递增函数.

严格单调连续函数的逆函数也是严格单调且连续的

推论

定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定是可逆的, 且其逆也是严格单调连续的.

Proof.

不妨设 f 在 I 上严格单调递增. 由于 f 连续, 故由上一命题知 $f(I) = J$ 是区间.因为映射 $f : I \to J$ 是一一映射, 故它是可逆的.

设 $y_1 < y_2 \in J$, 记 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_1 \geqslant x_2$, 则因为 f 单调递增, 故 $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, 矛盾.这说明

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

因此 f^{-1} 是 J 上的严格单调递增函数.因为 $f^{-1}(J) = I$ 为区间, 故由上一命题, f^{-1} 连续. $\square$

区间上连续函数可逆的充要条件

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的连续函数, 则 f 可逆当且仅当 f 是严格单调函数.

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的连续函数, 则 f 可逆当且仅当 f 是严格单调函数.

Proof.

利用下一节的介值定理. $\square$

初等函数的连续性

命题

初等函数在其定义域内均为连续函数.

命题

初等函数在其定义域内均为连续函数.

Proof.

我们已经证明了常值函数、三角函数、幂函数、指数函数与对数函数在其定义域内是连续的.

命题

初等函数在其定义域内均为连续函数.

Proof.

我们已经证明了常值函数、三角函数、幂函数、指数函数与对数函数在其定义域内是连续的.

根据上面的推论, 反三角函数在其定义域内也是连续的.

初等函数的连续性

命题

初等函数在其定义域内均为连续函数.

Proof.

我们已经证明了常值函数、三角函数、幂函数、指数函数与对数函数在其定义域内是连续的.

根据上面的推论，反三角函数在其定义域内也是连续的.

这些基本初等函数在有限次四则运算以及有限次复合运算之下也都是连续函数. □