函数

徐海峰整理

September 7, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

函数

数集

常见的数集有:

数集

常见的数集有:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

数集

常见的数集有:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

这里 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

数集

常见的数集有:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

这里 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

设 A 是一个数集,

$$A^* := \{x \in A \mid x \neq 0\}$$

$$A_+ := \{x \in A \mid x > 0\}$$

数集

常见的数集有:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

这里 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

设 A 是一个数集,

$$A^* := \{x \in A \mid x \neq 0\}$$

$$A_+ := \{x \in A \mid x > 0\}$$

熟悉常见的记号: $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_*$, $\mathbb{R}_+$ 等等.

数集

常见的数集有:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

这里 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

设 A 是一个数集,

$$A^* := \{x \in A \mid x \neq 0\}$$

$$A_+ := \{x \in A \mid x > 0\}$$

熟悉常见的记号: $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_*$, $\mathbb{R}_+$ 等等.

我们主要考虑实数集及其子集.

数集

常见的数集有:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

这里 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

设 A 是一个数集,

$$A^* := \{x \in A \mid x \neq 0\}$$

$$A_+ := \{x \in A \mid x > 0\}$$

熟悉常见的记号: $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_*$, $\mathbb{R}_+$ 等等.

我们主要考虑实数集及其子集.有时也用 A^+ 表示 A_+.

区间

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

区间

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

闭区间: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

区间

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

闭区间: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

左开右闭区间: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

区间

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

闭区间: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

左开右闭区间: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

左闭右开区间: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

区间

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
闭区间: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
左开右闭区间: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
左闭右开区间: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

以上为**有限区间**, 下面的区间称为**无限区间**.

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
闭区间: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
左开右闭区间: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
左闭右开区间: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

以上为**有限区间**, 下面的区间称为**无限区间**.

定义

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\}$

区间

定义

开区间: $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
闭区间: $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
左开右闭区间: $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
左闭右开区间: $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

以上为**有限区间**, 下面的区间称为**无限区间**.

定义

$(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\}$
$[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < +\infty\}$

区间

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
闭区间: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
左开右闭区间: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
左闭右开区间: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

以上为**有限区间**, 下面的区间称为**无限区间**.

定义

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\}$
$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < +\infty\}$
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$

区间

定义

开区间: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
闭区间: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
左开右闭区间: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
左闭右开区间: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

以上为**有限区间**, 下面的区间称为**无限区间**.

定义

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\}$
$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < +\infty\}$
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant b\}$

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思：“对所有”；

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思：“对所有”；
- $\exists$：表示“存在”；

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思：“对所有”；
- $\exists$：表示“存在”；
- $s.t.$：表示“使得”，是 such that 的缩写;

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思：“对所有”；
- $\exists$：表示“存在”；
- $s.t.$：表示“使得”，是 such that 的缩写;
- lhs 或 LHS：表示“左边”，是 left hand side 的缩写;

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思：“对所有”；
- $\exists$：表示“存在”；
- $s.t.$：表示“使得”，是 such that 的缩写;
- *lhs* 或 *LHS*：表示“左边”，是 left hand side 的缩写;
- *rhs* 或 *RHS*：表示“右边”，是 right hand side 的缩写;

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思：“对所有”；
- $\exists$：表示“存在”；
- $s.t.$：表示“使得”，是 such that 的缩写;
- *lhs* 或 *LHS*：表示“左边”，是 left hand side 的缩写;
- *rhs* 或 *RHS*：表示“右边”，是 right hand side 的缩写;

注意 $\pm\infty$ 不属于集合 $\mathbb{R}$,

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思: “对所有”；
- $\exists$：表示“存在”；
- $s.t.$：表示“使得”，是 such that 的缩写;
- *lhs* 或 *LHS*：表示“左边”，是 left hand side 的缩写;
- *rhs* 或 *RHS*：表示“右边”，是 right hand side 的缩写;

注意 $\pm\infty$ 不属于集合 $\mathbb{R}$,也不属于复数集 $\mathbb{C}$.

一些记号

- $-\infty$: 表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$: 表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$: 表示“任意”, 字面意思: “对所有”;
- $\exists$: 表示“存在”;
- $s.t.$: 表示“使得”, 是 such that 的缩写;
- *lhs* 或 *LHS* : 表示“左边”, 是 left hand side 的缩写;
- *rhs* 或 *RHS* : 表示“右边”, 是 right hand side 的缩写;

注意 $\pm\infty$ 不属于集合 $\mathbb{R}$,也不属于复数集 $\mathbb{C}$.

在不引起混淆的情况下, 有时 $+\infty$ 简记为 ∞.

一些记号

- $-\infty$: 表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$: 表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$: 表示“任意”, 字面意思: “对所有”;
- $\exists$: 表示“存在”;
- $s.t.$: 表示“使得”, 是 such that 的缩写;
- *lhs* 或 *LHS* : 表示“左边”, 是 left hand side 的缩写;
- *rhs* 或 *RHS* : 表示“右边”, 是 right hand side 的缩写;

注意 $\pm\infty$ 不属于集合 $\mathbb{R}$,也不属于复数集 $\mathbb{C}$.

在不引起混淆的情况下, 有时 $+\infty$ 简记为 ∞.例如 $(-\infty,\infty)$ 即表示 $\mathbb{R}$.

一些记号

- $-\infty$：表示负无穷远或负无穷大;
- $+\infty$：表示正无穷远或正无穷大;
- $\forall$：表示“任意”，字面意思：“对所有”；
- $\exists$：表示“存在”；
- $s.t.$：表示“使得”，是 such that 的缩写;
- lhs 或 LHS：表示“左边”，是 left hand side 的缩写;
- rhs 或 RHS：表示“右边”，是 right hand side 的缩写;

注意 $\pm\infty$ 不属于集合 $\mathbb{R}$,也不属于复数集 $\mathbb{C}$.

在不引起混淆的情况下, 有时 $+\infty$ 简记为 ∞.例如 $(-\infty,\infty)$ 即表示 $\mathbb{R}$.

邻域

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,

邻域

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,记

$$U(a, \delta) := (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

邻域

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,记

$$U(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

称之为点 a 的 δ-**邻域**.

邻域

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,记

$$U(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

称之为点 a 的 δ-**邻域**.

将 $U(a, \delta)$ 去掉中心点 a,

邻域

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,记

$$U(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

称之为点 a 的 δ-**邻域**.

将 $U(a, \delta)$ 去掉中心点 a,得到的集合记为 $\mathring{U}(a, \delta)$,

邻域

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,记

$$U(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

称之为点 a 的 δ-**邻域**.

将 $U(a, \delta)$ 去掉中心点 a,得到的集合记为 $\mathring{U}(a, \delta)$,即

$$\mathring{U}(a, \delta) := (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,记

$$U(a,\delta) := (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

称之为点 a 的 δ-**邻域**.

将 $U(a,\delta)$ 去掉中心点 a,得到的集合记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta) := (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

称之为点 a **的空心** δ-**邻域**. (有时也称**空心邻域**为**去心邻域**.)

定义

设 $a, \delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$,记

$$U(a,\delta) := (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

称之为**点 a 的 δ-邻域**.

将 $U(a,\delta)$ 去掉中心点 a,得到的集合记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta) := (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

称之为**点 a 的空心 δ-邻域**. (有时也称**空心邻域**为**去心邻域**.)

$(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ-邻域;

邻域

定义

设 $a,\delta\in\mathbb{R}$, 且 $\delta>0$,记

$$U(a,\delta):=(a-\delta,a+\delta)=\{x\in\mathbb{R}\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

称之为**点 a 的 δ-邻域**.

将 $U(a,\delta)$ 去掉中心点 a,得到的集合记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta):=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

称之为**点 a 的空心 δ-邻域**. (有时也称**空心邻域**为**去心邻域**.)

$(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ-邻域;
$(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ-邻域.

函数

定义

设 X, Y 是两个集合,

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,

函数

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,

函数

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的一个**映射**,

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f : X \to Y$.

函数

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f : X \to Y$.

若 $x \in X$ 在映射 f 下对应到 y,

函数

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f : X \to Y$.

若 $x \in X$ 在映射 f 下对应到 y,则称 y 是 x 在 f 下的**像**,

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f: X \to Y$.

若 $x \in X$ 在映射 f 下对应到 y,则称 y 是 x 在 f 下的**像**,记作 $y = f(x)$;

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f : X \to Y$.

若 $x \in X$ 在映射 f 下对应到 y,则称 y 是 x 在 f 下的**像**,记作 $y = f(x)$;而 x 被称为 y 的**原像**.

函数

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f: X \to Y$.

若 $x \in X$ 在映射 f 下对应到 y,则称 y 是 x 在 f 下的**像**,记作 $y = f(x)$;而 x 被称为 y 的**原像**.

当 Y 是数集时, 称映射 $f: X \to Y$ 是**一个函数**.

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f: X \to Y$.

若 $x \in X$ 在映射 f 下对应到 y,则称 y 是 x 在 f 下的**像**,记作 $y = f(x)$;而 x 被称为 y 的**原像**.

当 Y 是数集时, 称映射 $f: X \to Y$ 是**一个函数**.
本课程主要考虑 $X, Y \subset \mathbb{R}$ 时的情形. 这种函数称为一元实值函数.

定义

设 X, Y 是两个集合,若存在一个对应 f,使得对每个 $x \in X$,都有一个元素 $y \in Y$ 与之对应.允许 X 中不同的两个元素对应到 Y 中同一个元素;但不允许 X 中一个元素对应到 Y 中两个或两个以上的元素.

这样的对应 f 称为集合 X 到 Y 的**一个映射**,记作 $f: X \to Y$.

若 $x \in X$ 在映射 f 下对应到 y,则称 y 是 x 在 f 下的**像**,记作 $y = f(x)$;而 x 被称为 y 的**原像**.

当 Y 是数集时, 称映射 $f: X \to Y$ 是**一个函数**.
本课程主要考虑 $X, Y \subset \mathbb{R}$ 时的情形. 这种函数称为一元实值函数.
二元实值函数指的是 $f: X \times Y \to \mathbb{R}$.

单射和满射

定义

设 $f: X \to Y$ 是一个映射，

单射和满射

定义

设 $f: X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

单射和满射

定义

设 $f : X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

定义

设 $f : X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2,$$

则称 f 是 X 到 Y 的一个**单射**.

单射和满射

定义

设 $f : X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2,$$

则称 f 是 X 到 Y 的一个**单射**.

若 $\forall y \in Y$,

定义

设 $f : X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2,$$

则称 f 是 X 到 Y 的一个单射.

若 $\forall y \in Y$,$\exists x \in X$,

定义

设 $f : X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2,$$

则称 f 是 X 到 Y 的一个单射.

若 $\forall y \in Y$,$\exists x \in X$,使得 $y = f(x)$,

单射和满射

定义

设 $f: X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2,$$

则称 f 是 X 到 Y 的一个**单射**.

若 $\forall y \in Y$,$\exists x \in X$,使得 $y = f(x)$,则称 f 是一个**满射**.

单射和满射

定义

设 $f: X \to Y$ 是一个映射,若 $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2,$$

则称 f 是 X 到 Y 的一个**单射**.

若 $\forall y \in Y$,$\exists x \in X$,使得 $y = f(x)$,则称 f 是一个**满射**.

既单且满的映射又称为**一一映射**.

函数的定义域和值域

定义

对于映射 $f : X \to Y$,

函数的定义域和值域

定义

对于映射 $f : X \to Y$,X 称为 f 的**定义域**, 也记为 D_f;

函数的定义域和值域

定义

对于映射 $f : X \to Y$,X 称为 f 的**定义域**, 也记为 D_f;$f(X)$ 称为 f 的**值域**.

一些特殊的函数

Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dirichlet 简介

Figure 1: Dirichlet

Figure 2: 狄里克雷

Dirichlet 简介

Figure 1: Dirichlet

Figure 2: 狄里克雷

狄里克雷(Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1805–1859), 德国数学家, 对数论、数学分析和数学物理有突出贡献, 是解析数论的创始人之一.

Dirichlet 1805年2月13日出生于法兰西第一帝国(1804–1815年)的迪伦(Düren), 现在属于德国. 1859年5月5日在汉诺威王国的哥廷根去世.

注: 汉诺威王国(Königreich Hannover)是1814年10月因维也纳会议而建立的王国, 在1815年6月和其他38个主权国家加入德意志邦联. 汉诺威王国于1866年被普鲁士王国征服. 自1871年1月, 汉诺威成为统一的德意志帝国的一个省, 即汉诺威省.

Dirichlet

Dirichlet 1805年2月13日出生于法兰西第一帝国(1804–1815年)的迪伦(Düren), 现在属于德国. 1859年5月5日在汉诺威王国的哥廷根去世.

注: 汉诺威王国(Königreich Hannover)是1814年10月因维也纳会议而建立的王国, 在1815年6月和其他38个主权国家加入德意志邦联. 汉诺威王国于1866年被普鲁士王国征服. 自1871年1月, 汉诺威成为统一的德意志帝国的一个省, 即汉诺威省.

Dirichlet 的全名是 Lejeune Dirichlet(勒热纳·狄利克雷), 因此看上去是个法国人名. Le jeune 是年轻人的意思.

Dirichlet

Dirichlet 1805年2月13日出生于法兰西第一帝国(1804–1815年)的迪伦(Düren), 现在属于德国. 1859年5月5日在汉诺威王国的哥廷根去世.

注: 汉诺威王国(Königreich Hannover)是1814年10月因维也纳会议而建立的王国, 在1815年6月和其他38个主权国家加入德意志邦联. 汉诺威王国于1866年被普鲁士王国征服. 自1871年1月, 汉诺威成为统一的德意志帝国的一个省, 即汉诺威省.

Dirichlet 的全名是 Lejeune Dirichlet(勒热纳·狄利克雷), 因此看上去是个法国人名. Le jeune 是年轻人的意思.

勒热纳·狄利克雷最为人熟知的是他证明了在任何首项与公差互质的等差数列中存在无穷多个素数.

Dirichlet

Dirichlet 1805年2月13日出生于法兰西第一帝国(1804–1815年)的迪伦(Düren), 现在属于德国. 1859年5月5日在汉诺威王国的哥廷根去世.

注: 汉诺威王国(Königreich Hannover)是1814年10月因维也纳会议而建立的王国, 在1815年6月和其他38个主权国家加入德意志邦联. 汉诺威王国于1866年被普鲁士王国征服. 自1871年1月, 汉诺威成为统一的德意志帝国的一个省, 即汉诺威省.

Dirichlet 的全名是 Lejeune Dirichlet(勒热讷·狄利克雷), 因此看上去是个法国人名. Le jeune 是年轻人的意思.

勒热讷·狄利克雷最为人熟知的是他证明了在任何首项与公差互质的等差数列中存在无穷多个素数.

定理 (Dirichlet)

设 a 和 m 是两个互素的正整数, 则存在无穷多个素数 p, 使得 $p \equiv a \pmod{m}$.

Dirichlet

Dirichlet 1805年2月13日出生于法兰西第一帝国(1804–1815年)的迪伦(Düren), 现在属于德国. 1859年5月5日在汉诺威王国的哥廷根去世.

注: 汉诺威王国(Königreich Hannover)是1814年10月因维也纳会议而建立的王国, 在1815年6月和其他38个主权国家加入德意志邦联. 汉诺威王国于1866年被普鲁士王国征服. 自1871年1月, 汉诺威成为统一的德意志帝国的一个省, 即汉诺威省.

Dirichlet 的全名是 Lejeune Dirichlet(勒热讷·狄利克雷), 因此看上去是个法国人名. Le jeune 是年轻人的意思.

勒热讷·狄利克雷最为人熟知的是他证明了在任何首项与公差互质的等差数列中存在无穷多个素数.

定理 (Dirichlet)

设 a 和 m 是两个互素的正整数, 则存在无穷多个素数 p, 使得 $p \equiv a \pmod{m}$.

详见 Dirichlet定理

特征函数

设 A 为集合 X 的子集, 定义函数 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ 为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X - A. \end{cases}$$

特征函数

设 A 为集合 X 的子集, 定义函数 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ 为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X - A. \end{cases}$$

这个函数称为 A 的**特征函数**.

特征函数

设 A 为集合 X 的子集, 定义函数 $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ 为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X - A. \end{cases}$$

这个函数称为 A 的**特征函数**.容易看出, $A \neq B$ 当且仅当 $\chi_A \neq \chi_B$.

符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

取整函数

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,

取整函数

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,称函数 $f(x) = [x]$ 为**取整函数**.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个**多值函数**.

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个**多值函数**.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个**多值函数**.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,则可以定义其**幅角** $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ 为 Ox 轴正向按逆时针旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度.

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f: X \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,则可以定义其幅角 $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ 为 Ox 轴正向按逆时针旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度.当 $z = O$ 时, $\mathrm{Arg}(z)$ 取任意值.

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ **是一个多值函数**.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,则可以定义其**幅角** $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ 为 Ox 轴正向按逆时针旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度.当 $z = O$ 时, $\mathrm{Arg}(z)$ 取任意值. 显然 θ 不唯一.

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,则可以定义其幅角 $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ 为 Ox 轴正向按逆时针旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度.当 $z = O$ 时, $\mathrm{Arg}(z)$ 取任意值.
显然 θ 不唯一.即 $Arg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,则可以定义其幅角 $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ 为 Ox 轴正向按逆时针旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度.当 $z = O$ 时, $\mathrm{Arg}(z)$ 取任意值.
显然 θ 不唯一.即 $Arg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.
定义 $\arg(z)$ 为 z 的幅角中位于区间 $[0, 2\pi)$ 中的值,

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ **是一个多值函数**.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,则可以定义其**幅角** $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ 为 Ox 轴正向按逆时针旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度.当 $z = O$ 时, $\mathrm{Arg}(z)$ 取任意值.
显然 θ 不唯一.即 $Arg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.
定义 $\arg(z)$ 为 z 的幅角中位于区间 $[0, 2\pi)$ 中的值,称之为 z 的**主幅角**.

多值函数

定义

若对每个 $x \in X$,可以对应到 $\mathbb{R}$ 中一个或多个元素,则称 $f : X \to \mathbb{R}$ **是一个多值函数**.

例

对于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $z = (x, y)$,若 $z \neq O = (0, 0)$,则可以定义其**幅角** $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ 为 Ox 轴正向按逆时针旋转到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的角度.当 $z = O$ 时, $\mathrm{Arg}(z)$ 取任意值.
显然 θ 不唯一.即 $Arg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个多值函数.
定义 $\arg(z)$ 为 z 的幅角中位于区间 $[0, 2\pi)$ 中的值,称之为 z 的**主幅角**.
$\arg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个函数.

逆映射

设 $f : X \to Y$ 是一个一一映射，

逆映射

设 $f : X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,

逆映射

设 $f : X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,存在唯一的 $x \in X$ 与之对应,

逆映射

设 $f : X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,存在唯一的 $x \in X$ 与之对应,即可以定义映射 $g : Y \to X, \ y \mapsto x$.

逆映射

设 $f : X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,存在唯一的 $x \in X$ 与之对应,即可以定义映射 $g : Y \to X,\ y \mapsto x.g$ 显然也是一一映射.

逆映射

设 $f: X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,存在唯一的 $x \in X$ 与之对应,即可以定义映射 $g: Y \to X$, $y \mapsto x.g$ 显然也是一一映射.称之为 f 的**逆映射**,

逆映射

设 $f : X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,存在唯一的 $x \in X$ 与之对应,即可以定义映射 $g : Y \to X$, $y \mapsto x$.g 显然也是一一映射.称之为 f 的**逆映射**,记作 $g = f^{-1}$.

逆映射

设 $f : X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,存在唯一的 $x \in X$ 与之对应,即可以定义映射 $g : Y \to X,\ y \mapsto x$.$g$ 显然也是一一映射.称之为 f 的**逆映射**,记作 $g = f^{-1}$.

当 f 是既单且满的函数时,

逆映射

设 $f: X \to Y$ 是一个一一映射,则对每个 $y \in Y$,存在唯一的 $x \in X$ 与之对应,即可以定义映射 $g: Y \to X$, $y \mapsto x.g$ 显然也是一一映射.称之为 f 的**逆映射**,记作 $g = f^{-1}$.

当 f 是既单且满的函数时,所定义的逆映射 f^{-1} 也称为**反函数**.

例

对数函数 $y = \ln x$ 是指数函数 $y = \exp(x) = e^x$ 的反函数.

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x, y) = 0$ 确定.

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x, y) = 0$ 确定.例如由方程 $x + y = 2$ 确定的函数 $y = y(x)$,

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x, y) = 0$ 确定.例如由方程 $x + y = 2$ 确定的函数 $y = y(x)$,以及由方程 $e^y + \sin(x-y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$.

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x, y) = 0$ 确定.例如由方程 $x + y = 2$ 确定的函数 $y = y(x)$,以及由方程 $e^y + \sin(x - y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$.
像 $x + y = 2$ 可以改写为 $y = 2 - x$ 这样的显函数;

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x, y) = 0$ 确定.例如由方程 $x + y = 2$ 确定的函数 $y = y(x)$,以及由方程 $e^y + \sin(x - y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$.
像 $x + y = 2$ 可以改写为 $y = 2 - x$ 这样的显函数;而 $e^y + \sin(x - y) = 0$ 之类的函数一般难以明确写出 y 关于 x 的表达式.

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x,y)=0$ 确定.例如由方程 $x+y=2$ 确定的函数 $y=y(x)$,以及由方程 $e^y+\sin(x-y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$.

像 $x+y=2$ 可以改写为 $y=2-x$ 这样的显函数;而 $e^y+\sin(x-y)=0$ 之类的函数一般难以明确写出 y 关于 x 的表达式.

注: “隐函数一般由方程 $F(x,y)=0$ 确定”这句话不是非常严谨, 一般需要添加条件.

隐函数

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y = x^3 + \ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x, y) = 0$ 确定.例如由方程 $x + y = 2$ 确定的函数 $y = y(x)$,以及由方程 $e^y + \sin(x - y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$.

像 $x + y = 2$ 可以改写为 $y = 2 - x$ 这样的显函数;而 $e^y + \sin(x - y) = 0$ 之类的函数一般难以明确写出 y 关于 x 的表达式.

注: "隐函数一般由方程 $F(x, y) = 0$ 确定"这句话不是非常严谨, 一般需要添加条件.例如 $x^2 + y^2 = 1$ 在 $y \geqslant 0$ 时确定了 y 是 x 的函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$; 在 $x \geqslant 0$ 时确定了 x 是 y 的函数 $x = \sqrt{1 - y^2}$.

定义

如果一个函数可以用未知量的表达式明确表示出来,比如 $y=x^3+\ln(x-2)$,则称之为**显函数**;否则称之为**隐函数**.

隐函数一般由方程 $F(x,y)=0$ 确定.例如由方程 $x+y=2$ 确定的函数 $y=y(x)$,以及由方程 $e^y+\sin(x-y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$.

像 $x+y=2$ 可以改写为 $y=2-x$ 这样的显函数;而 $e^y+\sin(x-y)=0$ 之类的函数一般难以明确写出 y 关于 x 的表达式.

注: “隐函数一般由方程 $F(x,y)=0$ 确定”这句话不是非常严谨, 一般需要添加条件.例如 $x^2+y^2=1$ 在 $y\geqslant 0$ 时确定了 y 是 x 的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$; 在 $x\geqslant 0$ 时确定了 x 是 y 的函数 $x=\sqrt{1-y^2}$.通常我们可以直接说 $e^y+\sin(x-y)=0$ 这样的方程确定了 y 是 x 的函数, 这是由**隐函数存在定理**所保证的. 隐函数存在定理是一个十分重要的定理, 我们现在只能先承认, 不作证明.

函数的有界性

定义

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,

函数的有界性

定义

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$.

函数的有界性

定义

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,

函数的有界性

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,

函数的有界性

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,

函数的有界性

定义

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x) \leqslant A$, $\forall x \in X$,

函数的有界性

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x) \leqslant A, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有上界** A.

函数的有界性

定义

考虑函数 $f:D\to\mathbb{R}$,$D\subset\mathbb{R}$.设 $X\subset D$.

(1) 若存在正数 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$,对所有 $x\in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x)\leqslant A,\ \forall x\in X$,则称**函数 f 在 X 上有上界** A.称 A 是函数 f 在 X 上的**一个上界**;

函数的有界性

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x) \leqslant A, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有上界** A.称 A 是函数 f 在 X 上的**一个上界**;

(3) 若存在数 B,

函数的有界性

定义

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x) \leqslant A, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有上界** A.称 A 是函数 f 在 X 上的**一个上界**;

(3) 若存在数 B,使得 $f(x) \geqslant B, \forall x \in X$,

函数的有界性

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x) \leqslant A, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有上界** A.称 A 是函数 f 在 X 上的**一个上界**;

(3) 若存在数 B,使得 $f(x) \geqslant B, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有下界** B.

函数的有界性

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,$D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x) \leqslant A, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有上界** A.称 A 是函数 f 在 X 上的**一个上界**;

(3) 若存在数 B,使得 $f(x) \geqslant B, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有下界** B.称 B 是函数 f 在 X 上的**一个下界**.

函数的有界性

定义

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$.设 $X \subset D$.

(1) 若存在正数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,对所有 $x \in X$ 都成立,则称**函数 f 在 X 上有界**;否则称**函数 f 在 X 上无界**;

(2) 若存在数 A,使得 $f(x) \leqslant A, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有上界** A.称 A 是函数 f 在 X 上的一个上界;

(3) 若存在数 B,使得 $f(x) \geqslant B, \forall x \in X$,则称**函数 f 在 X 上有下界** B.称 B 是函数 f 在 X 上的一个下界.

定义域内有界的函数称为**有界函数**.

函数的单调性

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,

函数的单调性

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在 I 上单调递增**; I 称为**单调递增区间**.

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在** I **上单调递增**; I 称为**单调递增区间**.

(2) 任取$x_1, x_2 \in I$,

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在 I 上单调递增**; I 称为**单调递增区间**.

(2) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

考虑函数 $f : D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在** I **上单调递增**; I 称为**单调递增区间**.

(2) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 f **在** I **上单调递减**; I 称为**单调递减区间**.

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.
(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在** I **上单调递增**; I 称为单**调递增区间**.
(2) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 f **在** I **上单调递减**; I 称为单**调递减区间**.
若上面的 $\leqslant$ 改为 $<$(相应的 $\geqslant$ 改为 $>$),

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在** I **上单调递增**; I 称为**单调递增区间**.

(2) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 f **在** I **上单调递减**; I 称为**单调递减区间**.

若上面的 $\leqslant$ 改为 $<$(相应的 $\geqslant$ 改为 $>$),则称 f 严格单调递增(严格单调递减).

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.

(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在 I 上单调递增**; I 称为**单调递增区间**.

(2) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 f **在 I 上单调递减**; I 称为**单调递减区间**.

若上面的 $\leqslant$ 改为 $<$(相应的 $\geqslant$ 改为 $>$),则称 f 严格单调递增(严格单调递减).

若函数 $f(x)$ 在定义域内(严格)单调递增或(严格)单调递减,

考虑函数 $f: D \to \mathbb{R}$,设区间 $I \subset D$.
(1) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f **在 I 上单调递增**; I 称为**单调递增区间**.
(2) 任取$x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$ 推出 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 f **在 I 上单调递减**; I 称为**单调递减区间**.
若上面的 $\leqslant$ 改为 $<$(相应的 $\geqslant$ 改为 $>$),则称 f 严格单调递增(严格单调递减).
若函数 $f(x)$ 在定义域内(严格)单调递增或(严格)单调递减,则称 $f(x)$ 是(严格)单调递增函数或(严格)单调递减函数.

函数的奇偶性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称

函数的奇偶性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$),

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$),注意 D 不一定包含原点.

(1) 若 $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$,

函数的奇偶性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$),注意 D 不一定包含原点.

(1) 若 $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$,则称 f 是 D 上的**奇函数**.

函数的奇偶性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$),注意 D 不一定包含原点.

(1) 若 $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$,则称 f 是 D 上的**奇函数**.

(2) 若 $f(-x) = f(x), \forall x \in D$,

函数的奇偶性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$),注意 D 不一定包含原点.

(1) 若 $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$,则称 f 是 D 上的**奇函数**.

(2) 若 $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$,则称 f 是 D 上的**偶函数**.

函数的奇偶性

性质

任何定义域关于原点对称的函数都可以表为一个奇函数和一个偶函数之和.

性质

任何定义域关于原点对称的函数都可以表为一个奇函数和一个偶函数之和.

Proof.

设 $f(x)$ 是 D 上的一个函数,

函数的奇偶性

性质

任何定义域关于原点对称的函数都可以表为一个奇函数和一个偶函数之和.

Proof.

设 $f(x)$ 是 D 上的一个函数,D 关于原点对称.

性质

任何定义域关于原点对称的函数都可以表为一个奇函数和一个偶函数之和.

Proof.

设 $f(x)$ 是 D 上的一个函数,D 关于原点对称.

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

性质

任何定义域关于原点对称的函数都可以表为一个奇函数和一个偶函数之和.

Proof.

设 $f(x)$ 是 D 上的一个函数,D 关于原点对称.

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

容易验证 $g(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是 D 上的奇函数;

性质

任何定义域关于原点对称的函数都可以表为一个奇函数和一个偶函数之和.

Proof.

设 $f(x)$ 是 D 上的一个函数,D 关于原点对称.

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

容易验证 $g(x):=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是 D 上的奇函数;$h(x):=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是 D 上的偶函数. $\square$

函数的奇偶性

性质

任何定义域关于原点对称的函数都可以表为一个奇函数和一个偶函数之和.

Proof.

设 $f(x)$ 是 D 上的一个函数,D 关于原点对称.

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

容易验证 $g(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是 D 上的奇函数;$h(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是 D 上的偶函数. $\square$

习题. 证明这样的分解是唯一的.

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x+T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

例如: $y \equiv C$, C 是某个常数. 不存在最小正周期.

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x+T \in D$,恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

例如: $y \equiv C$, C 是某个常数. 不存在最小正周期.

Dirichlet 函数也是周期函数.

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

例如: $y \equiv C$, C 是某个常数. 不存在最小正周期.

Dirichlet 函数也是周期函数.若 $T \in \mathbb{Q}$,

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

例如: $y \equiv C$, C 是某个常数. 不存在最小正周期.

Dirichlet 函数也是周期函数.若 $T \in \mathbb{Q}$,则 $x + T$ 和 x 同为有理数或同为无理数,

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

例如: $y \equiv C$, C 是某个常数. 不存在最小正周期.

Dirichlet 函数也是周期函数.若 $T \in \mathbb{Q}$,则 $x + T$ 和 x 同为有理数或同为无理数,从而 $D(x + T) = D(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x+T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

例如: $y \equiv C$, C 是某个常数. 不存在最小正周期.

Dirichlet 函数也是周期函数.若 $T \in \mathbb{Q}$,则 $x+T$ 和 x 同为有理数或同为无理数,从而 $D(x+T) = D(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.因此, 任意有理数都是 $D(x)$ 的周期,

函数的周期性

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意 $x \in D$, $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**,T 是 f 的**一个周期**.

通常, 周期函数的周期是指**最小正周期**.但并不是所有周期函数都有最小正周期.

例如: $y \equiv C$, C 是某个常数. 不存在最小正周期.

Dirichlet 函数也是周期函数.若 $T \in \mathbb{Q}$,则 $x+T$ 和 x 同为有理数或同为无理数,从而 $D(x+T) = D(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.因此, 任意有理数都是 $D(x)$ 的周期,故不存在最小正周期.

例

研究函数 $f(x) = [2x] - 2[x]$ 的周期性.

例

研究函数 $f(x) = [2x] - 2[x]$ 的周期性.

Proof.

对任意实数 x, $[x] \leqslant x < [x] + 1$, 故 $2[x] \leqslant 2x < 2[x] + 2$.

例

研究函数 $f(x)=[2x]-2[x]$ 的周期性.

Proof.

对任意实数 x, $[x]\leqslant x<[x]+1$, 故 $2[x]\leqslant 2x<2[x]+2$.因此

$$0\leqslant [2x]-2[x]<2,$$

例

研究函数 $f(x)=[2x]-2[x]$ 的周期性.

Proof.

对任意实数 x, $[x]\leqslant x<[x]+1$, 故 $2[x]\leqslant 2x<2[x]+2$.因此

$$0\leqslant [2x]-2[x]<2,$$

即 $f(x)$ 只取值 0 或 1.

例

研究函数 $f(x)=[2x]-2[x]$ 的周期性.

Proof.

对任意实数 x, $[x]\leqslant x<[x]+1$, 故 $2[x]\leqslant 2x<2[x]+2$.因此

$$0\leqslant [2x]-2[x]<2,$$

即 $f(x)$ 只取值 0 或 1.

设 $n\in\mathbb{Z}$. 当 $x\in[n,n+\frac{1}{2})$ 时, $2n\leqslant 2x<2n+1$. 此时 $[2x]=2n$, $[x]=n$, 故 $f(x)=[2x]-2[x]=0$;

例

研究函数 $f(x)=[2x]-2[x]$ 的周期性.

Proof.

对任意实数 x, $[x]\leqslant x<[x]+1$, 故 $2[x]\leqslant 2x<2[x]+2$.因此

$$0\leqslant [2x]-2[x]<2,$$

即 $f(x)$ 只取值 0 或 1.

设 $n\in\mathbb{Z}$. 当 $x\in[n,n+\frac{1}{2})$ 时, $2n\leqslant 2x<2n+1$. 此时 $[2x]=2n$, $[x]=n$, 故 $f(x)=[2x]-2[x]=0$;

当 $x\in[n+\frac{1}{2},n+1)$ 时, $2n+1\leqslant 2x<2n+2$. 此时 $[2x]=2n+1$, $[x]=n$, 故 $f(x)=[2x]-2[x]=1$.

例

研究函数 $f(x) = [2x] - 2[x]$ 的周期性.

Proof.

对任意实数 x, $[x] \leqslant x < [x] + 1$, 故 $2[x] \leqslant 2x < 2[x] + 2$.因此

$$0 \leqslant [2x] - 2[x] < 2,$$

即 $f(x)$ 只取值 0 或 1.

设 $n \in \mathbb{Z}$. 当 $x \in [n, n + \frac{1}{2})$ 时, $2n \leqslant 2x < 2n + 1$. 此时 $[2x] = 2n$, $[x] = n$, 故 $f(x) = [2x] - 2[x] = 0$;

当 $x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1)$ 时, $2n + 1 \leqslant 2x < 2n + 2$. 此时 $[2x] = 2n + 1$, $[x] = n$, 故 $f(x) = [2x] - 2[x] = 1$.

因此, $f(x)$ 是周期函数, 最小正周期为 1. $\square$

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$;

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (2) 指数函数: $y = a^{x}$, $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;

初等函数

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (2) 指数函数: $y = a^{x}$, $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;
- (3) 对数函数: $y = \log_a x$, $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (2) 指数函数: $y = a^{x}$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (3) 对数函数: $y = \log_a x$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (4) 三角函数: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;

初等函数

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (2) 指数函数: $y = a^x$, $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;
- (3) 对数函数: $y = \log_a x$, $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;
- (4) 三角函数: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;
- (5) 反三角函数: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot}\, x$.

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (2) 指数函数: $y = a^x$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (3) 对数函数: $y = \log_a x$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (4) 三角函数: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;
- (5) 反三角函数: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot}\, x$.

当 $a = e$ ($e \approx 2.718281828459045235360287471352662497757247093699$) 时,

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (2) 指数函数: $y = a^x$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (3) 对数函数: $y = \log_a x$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (4) 三角函数: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;
- (5) 反三角函数: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot}\, x$.

当 $a = e$ ($e \approx 2.718281828459045235360287471352662497757247093699 9$) 时,$\log_a x$ 简记为 $\ln x$,

初等函数

定义

下列五类函数统称为**基本初等函数**.

- (1) 常值函数 $f(x) = C$ 和幂函数 $y = x^{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$;
- (2) 指数函数: $y = a^{x}$, $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;
- (3) 对数函数: $y = \log_a x$, $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;
- (4) 三角函数: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;
- (5) 反三角函数: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot}\, x$.

当 $a = e$ $(e \approx 2.718281828459045235360287471352662497757247093699 9)$ 时,$\log_a x$ 简记为 $\ln x$,称为**自然对数函数**.

复合函数

复合函数

设函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 满足

复合函数

设函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 满足

$$D_f \cap R_g \neq \emptyset,$$

复合函数

设函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 满足

$$D_f \cap R_g \neq \emptyset,$$

则对于使得 $g(x) \in D_f$ 的 x,

复合函数

设函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 满足

$$D_f \cap R_g \neq \emptyset,$$

则对于使得 $g(x) \in D_f$ 的 x,可定义 $y = h(x) = f(g(x))$.

设函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 满足

$$D_f \cap R_g \neq \emptyset,$$

则对于使得 $g(x) \in D_f$ 的 x,可定义 $y=h(x)=f(g(x))$.这样得到的函数 h 称为由 f 和 g 复合而成的函数(**复合函数**).

复合函数

设函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 满足

$$D_f \cap R_g \neq \emptyset,$$

则对于使得 $g(x) \in D_f$ 的 x,可定义 $y = h(x) = f(g(x))$.这样得到的函数 h 称为由 f 和 g 复合而成的函数(**复合函数**).记作 $h = f \circ g$.

初等函数

定义

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所生成的函数称为**初等函数**.

定义

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所生成的函数称为**初等函数**.

初等函数的定义域是指使其有定义的最大集合.

初等函数

定义

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所生成的函数称为**初等函数**.

初等函数的定义域是指使其有定义的最大集合.

Question: 由常数和基本初等函数经过无限次四则运算后的函数是怎样的?

定义

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所生成的函数称为**初等函数**.

初等函数的定义域是指使其有定义的最大集合.

Question: 由常数和基本初等函数经过无限次四则运算后的函数是怎样的?

例

设 $f_i(x) = \frac{x}{2^i}$,

定义

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所生成的函数称为**初等函数**.

初等函数的定义域是指使其有定义的最大集合.

Question: 由常数和基本初等函数经过无限次四则运算后的函数是怎样的?

例

设 $f_i(x) = \frac{x}{2^i}$,令

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \frac{x}{2^1} + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^3} + \cdots$$

双曲函数

双曲正弦:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲函数

双曲正弦:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

双曲函数

双曲正弦:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

显然, 它们的定义域都是 $\mathbb{R}$;

双曲函数

双曲正弦:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

显然, 它们的定义域都是 $\mathbb{R}$;并且 $\sinh x$ 是奇函数,

双曲函数

双曲正弦:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

显然, 它们的定义域都是 $\mathbb{R}$;并且 $\sinh x$ 是奇函数,$\cosh x$ 是偶函数.

双曲函数

双曲正弦:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

显然, 它们的定义域都是 $\mathbb{R}$;并且 $\sinh x$ 是奇函数,$\cosh x$ 是偶函数. 容易验证,

$$1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$$

双曲函数

双曲正弦:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

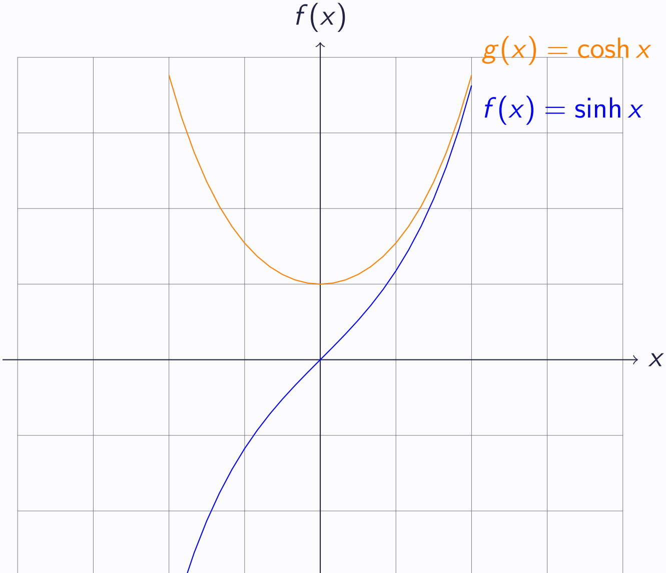
显然, 它们的定义域都是 $\mathbb{R}$;并且 $\sinh x$ 是奇函数,$\cosh x$ 是偶函数. 容易验证,

$$1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$$

注

$\sinh x$ 和 $\cosh x$ 有时可分别简写为 $\mathrm{sh}(x)$ 和 $\mathrm{ch}(x)$.

双曲函数的图像



双曲正切

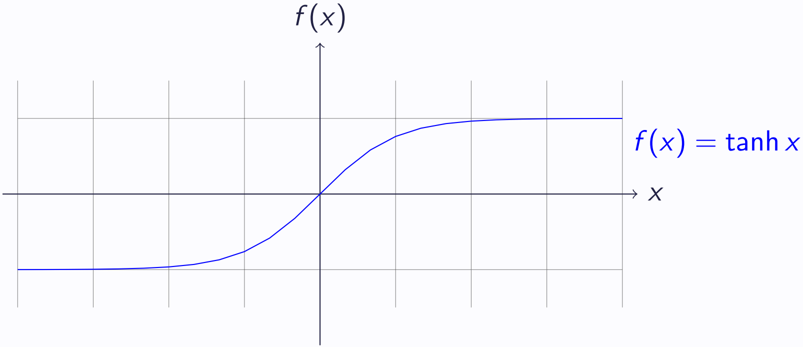
双曲正切:

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cos h} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

双曲正切

双曲正切:

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cos h} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



双曲函数的性质

$$
\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\
\sinh(x-y) &= \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)
\end{aligned}
$$

双曲函数的性质

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\
\sinh(x-y) &= \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

注

我们只需证明第一式和第三式.

双曲函数的性质

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\
\sinh(x-y) &= \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

注

我们只需证明第一式和第三式.第二式只需注意到 $\sinh(x-y) = \sinh(x+(-y))$, 并利用第一式即可.

双曲函数的性质

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$$

注

我们只需证明第一式和第三式.第二式只需注意到 $\sinh(x-y) = \sinh(x+(-y))$, 并利用第一式即可.

(详见`http://atzjg.net`上的问题3207.)

双曲函数性质的证明

Proof.

$$
\begin{aligned}
\sinh(x)\cosh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}\right]
\end{aligned}
$$

双曲函数性质的证明

Proof.

$$\begin{aligned}\sinh(x)\cosh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left[e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}\right]\end{aligned}$$

双曲函数性质的证明

Proof.

$$
\begin{aligned}
\sinh(x)\cosh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}\right]
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) = \frac{1}{2}\left[e^{x+y} - e^{-x-y}\right].
$$

□

回顾一下三角函数的和差化积与积化和差公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

回顾一下三角函数的和差化积与积化和差公式

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

注

这些基本公式在后续的计算中会经常用到.

回顾一下三角函数的和差化积与积化和差公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

注

这些基本公式在后续的计算中会经常用到. 具体证明参见 atzjg.net 问题 2023

反双曲函数

反双曲正弦:

$$y = \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

反双曲函数

反双曲正弦:

$$y = \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

反双曲余弦:

$$y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

反双曲函数

反双曲正弦:

$$y = \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

反双曲余弦:

$$y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

反双曲正切:

$$y = \operatorname{arctanh} x = \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

反双曲余弦函数的推导

我们以反双曲余弦为例，证明如下:

反双曲余弦函数的推导

我们以反双曲余弦为例，证明如下：

Proof.

$$y = \mathrm{arccosh} x \;\Rightarrow\; x = \cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

反双曲余弦函数的推导

我们以反双曲余弦为例，证明如下：

Proof.

$$y = \mathrm{arccosh} x \ \Rightarrow \ x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

这推出

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0.$$

反双曲余弦函数的推导

我们以反双曲余弦为例，证明如下:

Proof.

$$y = \mathrm{arccosh} x \;\Rightarrow\; x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

这推出

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0.$$

从而

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

反双曲余弦函数的推导

我们以反双曲余弦为例，证明如下:

Proof.

$$y = \mathrm{arccosh} x \;\Rightarrow\; x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

这推出

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0.$$

从而

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

注意 $x = \cosh y \geqslant 1$,

反双曲余弦函数的推导

我们以反双曲余弦为例, 证明如下:

Proof.

$$y = \mathrm{arccosh} x \;\Rightarrow\; x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

这推出

$$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0.$$

从而

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

注意 $x = \cosh y \geqslant 1$,故 $x \pm \sqrt{x^2 - 1} > 0$. □

Proof.

当 $y \in (-\infty, 0]$ 时，$e^y \leqslant 1$,

反双曲余弦函数的推导

Proof.

当 $y \in (-\infty, 0]$ 时，$e^y \leqslant 1$,从而

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

反双曲余弦函数的推导

Proof.

当 $y \in (-\infty, 0]$ 时, $e^y \leqslant 1$,从而

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

当 $y \in [0, +\infty)$ 时, $e^y \geqslant 1$,

反双曲余弦函数的推导

Proof.

当 $y \in (-\infty, 0]$ 时，$e^y \leqslant 1$,从而

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

当 $y \in [0, +\infty)$ 时，$e^y \geqslant 1$,从而

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

□

反双曲余弦函数的推导

Proof.

当 $y \in (-\infty, 0]$ 时，$e^y \leqslant 1$,从而

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

当 $y \in [0, +\infty)$ 时，$e^y \geqslant 1$,从而

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

□

其余两个的证明参见 atzjg.net 问题3208.

反双曲正弦的图像

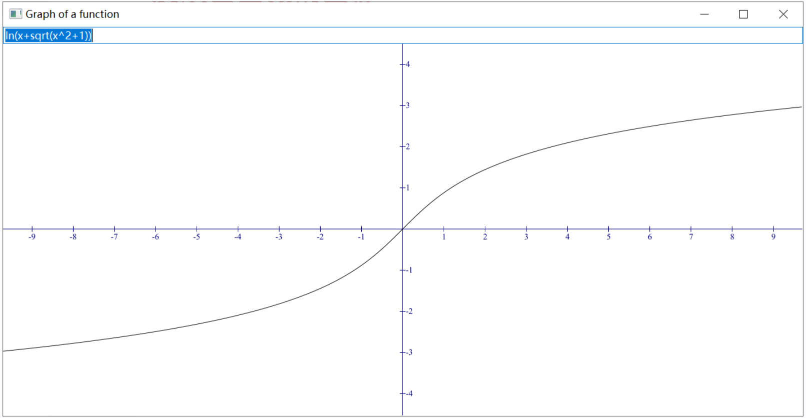


Figure 3: 反双曲正弦

反双曲余弦的图像

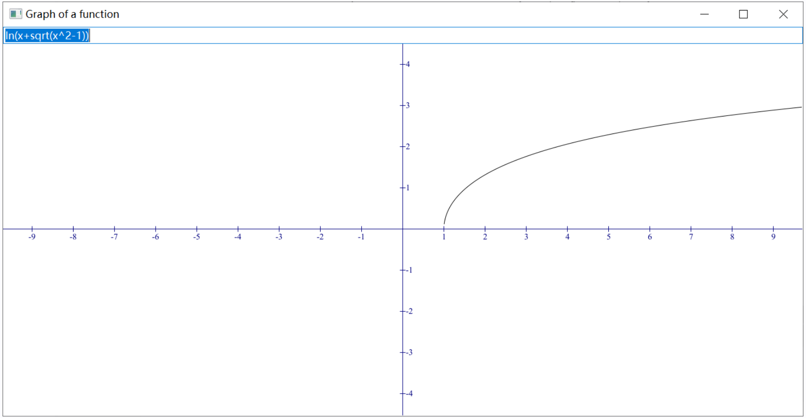


Figure 4: 反双曲余弦

反双曲正切的图像

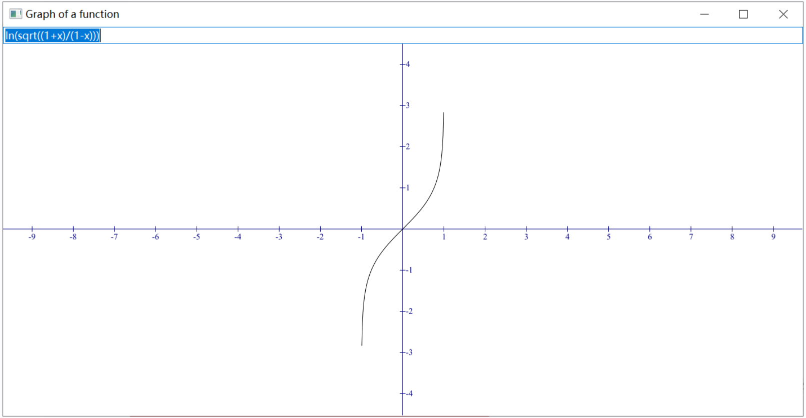
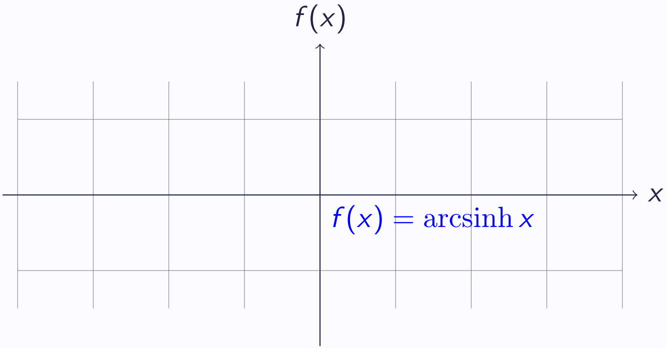


Figure 5: 反双曲正切

$\operatorname{arcsinh}(x)$



习题

用数学归纳法证明 Bernoulli 不等式

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \quad (x \geqslant -1).$$